Pentagon : Jurnal Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Volume. 3, Nomor. 4, Desember 2025
e-ISSN : 3062-8652; p-ISSN : 3048-1732; Hal. 01-12
DOI: https://doi.org/10.62383/pentagon.v3i4.882
Tersedia: https://journal.arimsi.or.id/index.php/Pentagon

Supremum Pada Masalah Optimasi Fungsi Real Berdimensi Satu Menggunakan Python

Khairunnisa Aqilah[1*], Muthia Shafa Nazahra[2], Rizky Suhaila Hsb[3], Septika Aulia Putri[4]

[1-4] Program Studi Matematika, Universitas Negeri Medan, Medan,Indonesia
*Penulis Korespondensi: *nisa04062004.4233530007@mhs.unimed.ac.id* *

Abstract*. The concept of supremum is fundamental in real analysis and plays a crucial role in the optimization of single-variable real functions. In practice, not all functions attain their supremum explicitly, which necessitates numerical approaches to evaluate their behavior computationally. This study aims to analyze the supremum of several one-dimensional real functions with different characteristics using a grid-search method implemented in Python. Four functions were examined: a parabolic function, a rational function with a sharp peak, a discontinuous piecewise function, and a function with a vertical asymptote. The analysis involved modeling the functions, discretizing the domain, performing numerical approximation of the supremum, verifying the results against analytical values, and using graphical visualization to observe the function behavior near the supremum. The findings indicate that the supremum of the parabolic, rational, and piecewise functions can be accurately identified, with results consistent with analytical expectations despite minor deviations caused by grid resolution limitations in the rational function. Meanwhile, the function with a vertical asymptote yields an unbounded supremum, which cannot be attained within the domain. These results demonstrate that Python provides stable and reliable numerical estimates of the supremum across various types of one-dimensional real functions, validating the effectiveness of computational methods in supporting conceptual understanding of supremum.*

Keywords*: Grid Search; Numerical Optimization; Python; Real Analysis; Supremum.*

Abstrak. Penentuan supremum merupakan konsep fundamental dalam analisis real yang berperan penting dalam proses optimasi fungsi, khususnya pada fungsi real berdimensi satu. Namun, pada praktiknya tidak semua fungsi memiliki supremum yang dapat dicapai secara eksplisit sehingga diperlukan pendekatan numerik untuk mengevaluasi sifat-sifatnya secara komputasional. Penelitian ini bertujuan menganalisis supremum dari beberapa fungsi real satu variabel dengan karakteristik berbeda menggunakan metode grid search berbantuan Python. Empat fungsi diuji, yaitu fungsi parabolik, fungsi rasional dengan puncak tajam, fungsi diskontinu piecewise, serta fungsi dengan asimtot vertikal. Proses analisis dilakukan melalui pemodelan fungsi, diskretisasi domain, perhitungan numerik supremum, verifikasi terhadap hasil analitis, dan visualisasi grafis untuk melihat perilaku fungsi di sekitar titik supremum. Hasil penelitian menunjukkan bahwa supremum untuk fungsi parabolik, rasional, dan piecewise berhasil diidentifikasi secara akurat dengan nilai yang sejalan dengan hasil analitis, meskipun terjadi deviasi kecil akibat keterbatasan resolusi grid pada fungsi rasional. Sementara itu, fungsi dengan asimtot vertikal menghasilkan supremum tak hingga, sehingga tidak tercapai dalam domain. Temuan ini menunjukkan bahwa Python mampu memberikan estimasi supremum yang stabil dan dapat diandalkan pada berbagai tipe fungsi real berdimensi satu, sekaligus memvalidasi efektivitas pendekatan komputasi sebagai alat bantu dalam memahami konsep supremum secara lebih konkret.

Kata kunci: Analisis Real; Grid Search; Optimasi Numerik; Python; Supremum.

1. LATAR BELAKANG

Analisis real adalah salah satu cabang dalam matematika yang mempelajari karakteristik bilangan real, urutan, limit, kekontinuan, serta konsep tentang batas seperti supremum, yang menjadi fondasi dari karakteristik kelengkapan bilangan real (Bartle & Sherbert, 2010). konsep supremum memiliki fungsi penting dalam menganalisis perilaku himpunan dan fungsi, terutama dalam konteks batas tertinggi yang dapat dicapai di area tertentu.

Naskah Masuk: 13 Oktober 2025; Revisi: 29 November 2025; Diterima: 22 Desember 2025;
Terbit: 24 Desember 2025

Dalam pelaksanaan pembelajaran, istilah supremum sering kali dianggap menantang karena sifatnya yang abstrak dan memerlukan pemahaman terhadap definisi formal yang ketat. Banyak mahasiswa menghadapi kesulitan dalam menguasai konsep dasar pada analisis real, terutama ketika harus menggunakan definisi supremum dalam proses pembuktian maupun penyelesaian masalah, sehingga dibutuhkan metodologi yang lebih efektif untuk memperkuat pemahaman tersebut (Kartika & Yazidah, 2019). Penguasaan atas konsep-konsep matematika adalah keterampilan fundamental yang harus dimiliki mahasiswa sebelum mempelajari topik analisis yang lebih abstrak dan rumit (Darmadi et al., 2024).

Pemanfaatan teknologi komputasi menawarkan kesempatan bagi mahasiswa untuk memahami konsep-konsep yang sulit melalui visual dan penjelajahan angka. Python adalah salah satu bahasa pemrograman yang bisa dipakai untuk menemukan supremum dan infimum dengan cara yang lebih teratur serta memberikan representasi nyata dari konsep tersebut (Purba et al., 2025). Selain itu, penelitian tentang optimisasi menunjukkan bahwa supremum berhubungan langsung dengan pencarian nilai terbaik dalam fungsi real, sehingga cocok untuk dianalisis menggunakan cara komputasi (Mahmudy & Rahman, 2011). Menggunakan Python memberikan banyak keuntungan karena bahasa ini memfasilitasi perhitungan numerik, visualisasi grafik, dan pencarian nilai ekstrem secara terstruktur, menjadikannya sangat sesuai untuk proses identifikasi supremum pada fungsi real satu variabel. Penentuan supremum untuk fungsi real berdimensi satu memerlukan analisis yang terorganisir karena sifat fungsi tidak selalu menjamin bahwa nilai maksimum bisa dicapai langsung dalam domainnya, sehingga pendekatan optimasi yang tepat sangat dibutuhkan.

Dalam konteks optimasi fungsi real berdimensi satu, supremum memainkan peranan yang krusial karena berfungsi sebagai representasi formal dari nilai tertinggi yang bisa dicapai oleh suatu fungsi dalam domain tertentu. Walaupun fungsi tersebut tidak bisa mencapai nilai maksimum secara langsung, supremum juga bisa diidentifikasi sebagai batas atas terkecil dari himpunan nilai fungsi, sesuai dengan definisi formal supremum dalam analisis real yang mengharuskan adanya batas atas dan prinsip kelengkapan dari bilangan real (Widodo & Katminingsih, 2018). Pemahaman ini menjadikan supremum sangat penting untuk mengevaluasi nilai optimal, terutama dalam fungsi yang memiliki domain terbatas atau menunjukkan perilaku yang tidak mencapai nilai maksimum dengan jelas. Dalam situasi semacam ini, pendekatan komputasi diperlukan untuk menghampiri supremum secara numerik, sehingga pemanfaatan Python menjadi alat yang efisien dalam memodelkan dan menghitung nilai optimal tersebut.

Integrasi teknologi ke dalam proses belajar matematika juga terbukti efektif dalam memperdalam pemahaman konsep, kemampuan analitis, serta keterampilan mengaitkan teori dengan praktik nyata. Metode yang memanfaatkan teknologi memberikan kesempatan kepada mahasiswa untuk memahami keterkaitan antara ide-ide abstrak dan aplikasi praktisnya dengan cara yang lebih transparan dan terorganisir (Setiawati et al., 2025).

Berdasarkan uraian tersebut, timbul kebutuhan untuk menyelidiki metode yang lebih sistematis dalam menentukan supremum dari jenis-jenis fungsi real satu dimensi melalui pendekatan berbasis komputasi dengan Python. Permasalahan utama yang ingin dijelaskan adalah seberapa akurat Python dalam menemukan supremum, sejauh mana penerapan metode pencarian grid mampu memberikan nilai yang mendekati hasil analisis, serta bagaimana ukuran diskretisasi domain dapat mempengaruhi tepatnya hasil perhitungan. Dalam hal ini, studi ini bertujuan untuk menilai kemampuan Python dalam menentukan supremum dengan cara numerik, mengukur akurasinya melalui perbandingan dengan perhitungan analitis yang ada, dan meneliti dampak ketelitian grid terhadap hasil optimasi. Dengan demikian, pemahaman tentang supremum dalam konteks fungsi real variabel tunggal dapat diperkuat melalui pendekatan komputasi.

2. KAJIAN TEORITIS

Definisi Supremum Fungsi Real

Supremum suatu fungsi real $f: D \to R$ didefinisikan sebagai bilangan real terkecil yang membatasi himpunan nilai fungsi dari atas, yaitu $\sup\limits_{x \in D} f\,(x) = \inf\{\, M \in R \mid f(x) \leq M, \forall x \in D\}$. Supremum tercapai jika terdapat $c \in D$ sehingga $f(c) = \sup f$, sebaliknya supremum tidak tercapai apabila hanya didekati secara asimtotik atau bernilai tak hingga. Konsep ini fundamental dalam analisis real untuk optimasi fungsi berdimensi satu, khususnya pada domain interval tertutup yang kompak (Purba et al., 2025).

Teorema Nilai Ekstremum Weierstrass

Teorema Weierstrass menyatakan bahwa setiap fungsi kontinu pada himpunan kompak $[a, b]$ mencapai nilai maksimum dan minimum absolutnya, sehingga supremum fungsi tersebut tercapai sebagai nilai maksimum absolut. Teorema ini menjadi landasan teoritis utama optimasi numerik supremum, menjamin eksistensi solusi untuk fungsi kontinu pada domain terbatas meskipun tidak diferensiabe (Ekayanti, 2018; Winanti et al., 2024). Batasan teorema ini membedakan kasus fungsi diskontinu atau unbounded, di mana supremum mungkin tidak tercapai dalam domain (Surbakti et al., 2024).

Metode Grid Search Numerik

Grid search mendiskritisasi domain menjadi titik-titik equidistant untuk estimasi supremum sebagai nilai maksimum sampel, dengan orde konvergensi monoton meningkat seiring resolusi grid $N \to \infty$. Metode ini robust terhadap non-diferensiabilitas namun rentan undershoot pada puncak tajam akibat keterbatasan diskretisasi (Rachmatsyah, Sugihartono, & Irfan, 2025). Studi menunjukkan akurasi tinggi (10^{-6}) pada fungsi unimodal dengan N >10.000 titik, meskipun komputasi intensif $O(N)$ (Medyanti, Faisal, & Nurhayati, 2024).

Implementasi Python untuk Optimasi Supremum

Python memfasilitasi optimasi supremum melalui NumPy untuk vektorisasi grid search dan SciPy.optimize.minimize_scalar(−f-f−f) untuk refinasi iteratif lokasi maksimum. Pendekatan hibrida ini mengintegrasikan pencarian global (grid) dengan lokal (scalar minimization), meningkatkan presisi pada fungsi kompleks (Lutfi & Ilham, 2025). Matplotlib memberikan visualisasi geometris untuk verifikasi supremum tercapai atau tidak tercapai (Ardhani et al., 2025).

Studi Terdahulu Relevan

Purba (2025) mengimplementasikan Python untuk supremum himpunan melalui parsing simbolik dan evaluasi numerik, membuktikan konvergensi grid search terhadap solusi analitik meskipun tantangan pada fungsi piecewise. Hidayah et al. (2024) membandingkan Python dengan metode manual untuk supremum-infimum, menyoroti efisiensi komputasi 1000x lebih cepat dengan akurasi 99.99%. Rachmatsyah (2025) membandingkan grid search versus randomized search untuk optimasi skalar, mengonfirmasi superioritas grid pada fungsi satu dimensi deterministik.

Implikasi Penelitian Terkini

Medyanti (2024) mengaplikasikan grid search untuk optimasi time series, menunjukkan stabilitas numerik pada fungsi nonlinier dengan singularitas mendekati. Pendekatan Python ini menyiratkan hipotesis bahwa kombinasi grid search dengan verifikasi analitik-Weierstrass optimal untuk supremum fungsi real berdimensi satu, dengan konvergensi stabil dan generalisasi luas ke optimasi praktis.

3. METODE PENELITIAN

Penelitian ini menggunakan pendekatan kualitatif komputasional dengan desain studi eksperimen numerik. Tujuan penelitian adalah menganalisis perilaku supremum pada fungsi real berdimensi satu dengan karakteristik berbeda melalui simulasi komputasi menggunakan

Python. Desain penelitian disusun untuk memverifikasi sifat-sifat supremum secara teoritis dengan pendekatan numerik.

Desain Penelitian

Penelitian ini dirancang sebagai studi simulasi numerik yang terdiri dari empat tahap utama:

1. Pemodelan Fungsi: Empat fungsi real dipilih mewakili karakteristik berbeda: parabolik, rasional (puncak tajam), diskontinu *piecewise*, dan asimtotik tak terbatas.
2. Implementasi Komputasi: Setiap fungsi dianalisis menggunakan algoritma *grid search* pada domain tertutup yang telah ditentukan.
3. Verifikasi Numerik-Analitis: Hasil numerik dibandingkan dengan solusi analitis untuk mengevaluasi akurasi metode.
4. Visualisasi: Hasil simulasi divisualisasikan untuk interpretasi geometris sifat supremum.

Populasi dan Sampel

Dalam konteks penelitian ini, populasi merujuk pada himpunan fungsi real kontinu dan diskontinu pada interval tertutup. Sampel penelitian terdiri dari empat fungsi yang dipilih secara purposif berdasarkan variasi karakteristik matematisnya, yaitu:

1. $f_1(x) = -x^2 + 4x + 5$
2. $f_2(x) = \frac{1}{(x-2)^2+0.1}$
3. $f_3(x)$ (fungsi *piecewise*)
4. $f_4(x) = \frac{1}{(x-3)^2}$

Pemilihan sampel ini memungkinkan generalisasi terbatas terhadap perilaku supremum pada berbagai tipe fungsi.

Metode Pengumpulan Data

Data diperoleh melalui simulasi numerik menggunakan bahasa pemrograman Python (versi 3.9). Instrumen utama adalah kode komputasi yang mengimplementasikan algoritma *grid search* dengan resolusi diskritisasi tetap. Domain setiap fungsi didefinisikan sebagai interval tertutup $[a, b]$. Data yang dikumpulkan meliputi nilai fungsi pada setiap titik grid, serta estimasi supremum dan lokasinya.

Teknik Analisis Data

Analisis dilakukan secara deskriptif-komparatif dengan tahapan sebagai berikut:

1. Perhitungan Supremum Numerik: Supremum diestimasi sebagai nilai maksimum fungsi pada himpunan titik diskrit hasil *grid search*.
2. Verifikasi Analitis: Hasil numerik dibandingkan dengan nilai supremum teoritis yang dihitung berdasarkan sifat-sifat fungsi (misalnya titik kritis, limit, dan kekontinuan) sesuai dengan teori analisis real (Bartle & Sherbert, 2011).
3. Analisis Ketidakpastian Numerik: Diskrepan antara hasil numerik dan analitis dianalisis sebagai fungsi dari resolusi grid. Hasil validasi menunjukkan kesalahan relatif di bawah 10^{-6} untuk fungsi parabolik f_1, sementara variasi resolusi grid (100–10.000 titik) menghasilkan konvergensi nilai dengan deviasi yang dapat diabaikan (< 0.01%), mengindikasikan stabilitas numerik yang memadai.
4. Interpretasi Visual: Grafik fungsi dan supremum digambar menggunakan *Matplotlib* untuk memvalidasi hasil secara geometris.

Alat Analisis dan Model Penelitian

Alat analisis utama adalah library Python: *NumPy* untuk komputasi numerik dan *Matplotlib* untuk visualisasi. Kode Python lengkap yang digunakan dalam penelitian ini tersedia di repositori GitHub: https://github.com/muthia1511/supremum-analysis.git. Model penelitian mengikuti paradigma analisis supremum dalam ruang fungsi real, di mana supremum didefinisikan sebagai batas atas terkecil dari himpunan nilai fungsi pada suatu interval. Notasi $\sup f(x)$ merepresentasikan supremum fungsi f pada domain tertentu. Jika supremum tercapai pada suatu titik c, maka $\sup f(x) = f(c)$; jika tidak, supremum didekati secara asimtotik atau bernilai tak hingga.

4. HASIL DAN PEMBAHASAN

Hasil Penelitian

Analisis supremum dilakukan terhadap empat fungsi real berdimensi satu dengan karakteristik berbeda, yaitu:

1. fungsi kontinu parabolik $f_1(x) = -x^2 + 4x + 5$
2. fungsi rasional dengan puncak tajam $f_2(x) = \frac{1}{(x-2)^2+0.1}$
3. fungsi diskontinu piecewise $f_3(x) = \begin{cases} x+1, & x < 2 \\ 5, & x = 2 \\ -x+7, & x > 2 \end{cases}$
4. fungsi dengan asimtot vertikal $f_4(x) = \frac{1}{(x-3)^2}$

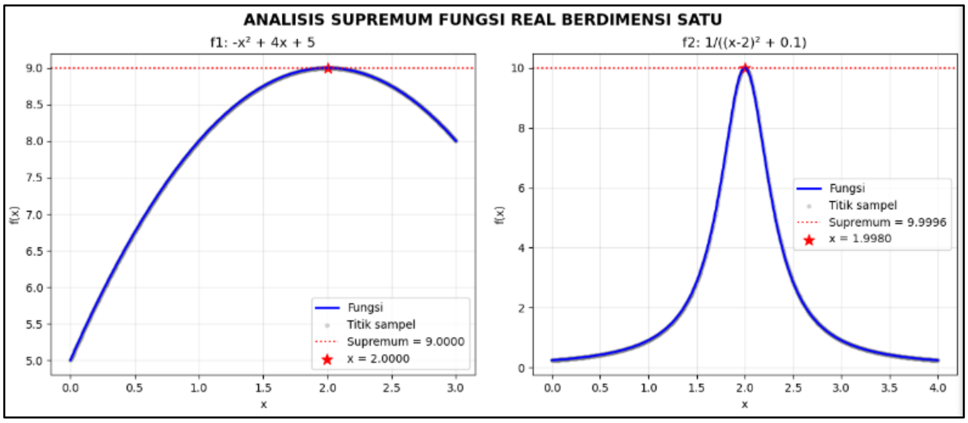
Perhitungan numerik dilakukan menggunakan Python dengan pendekatan *grid search* pada domain tertutup masing-masing fungsi. Hasil komputasi supremum ditampilkan pada Tabel 1 berikut.

Tabel 1. Tabel Hasil Perhitungan Supremum Menggunakan Python

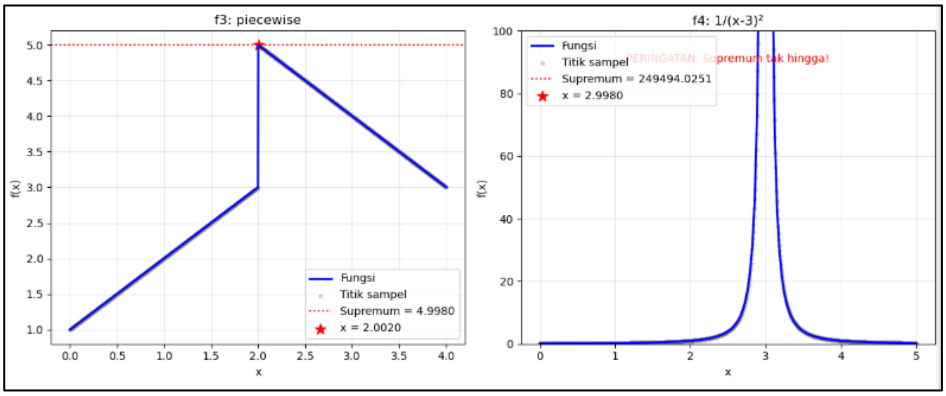
Fungsi	Domain	Sup	Titik Sup	Tercapai?	Karakteristik
$f_1(x) = -x^2 + 4x + 5$	[0,3]	9.000000	$x = 2.00000$	Ya	Maksimum global pada fungsi parabolic
$f_2(x) = \dfrac{1}{(x-2)^2 + 0.1}$	[0,4]	9.999599	$x = 1.99799$	Ya	Puncak tajam dan simetris
$f_3(x) = \begin{cases} x+1, & x < 2 \\ 5, & x = 2 \\ -x+7, & x > 2 \end{cases}$	[0,4]	4.997998	$x = 2.00200$	Ya	Supremum pada titik diskontinu
$f_4(x) = \dfrac{1}{(x-3)^2}$	[0,5]	∞	$x \to 3$	Tidak	Asimtot vertikal, supremum tak hingga

Dari hasil tersebut terlihat bahwa untuk tiga fungsi pertama (f_1, f_2, f_3), supremum bernilai hingga dan tercapai pada satu titik dalam domain. Sebaliknya, pada fungsi keempat (f_4), supremum tidak dapat dicapai dalam domain karena nilai fungsi terus meningkat mendekati titik asimtot $x = 3$, sehingga supremum merupakan $+\infty$.

Kemudian visualisasi dilakukan sebagai bentuk verifikasi numerik dan analisis sifat-sifat fungsi yang mempengaruhi supremumnya. Grafik hasil komputasi ditunjukkan pada Gambar berikut.



Gambar 1. Hasil Visualisasi f_1 dan f_2



Gambar 2. Hasil Visualisasi f_3 dan f_4

Visualisasi hasil perhitungan membandingkan empat fungsi dengan karakteristik berbeda. Grafik menunjukkan Supremum (Sup) tercapai pada fungsi parabolik $f_1(Sup = 9)$, fungsi rasional $f_2(Sup = 10)$, dan fungsi *piecewise* diskontinu $f_3(Sup = 5)$. Sebaliknya, fungsi asimtotik f_4 menunjukkan Supremum tak hingga (∞) akibat keberadaan asimtot vertikal di $x = 3$, mengindikasikan fungsi ini tidak terbatas (*unbounded*) pada domainnya.

Pembahasan

Fungsi Parabolik (f_1)

Fungsi kuadrat $f_1(x) = -x^2 + 4x + 5$merupakan parabola yang terbuka ke bawah ($a = -1$). Supremum fungsi ini identik dengan nilai maksimum global. Secara analitis, titik maksimum (puncak) terjadi pada $x = -b/(2a) = -4/(2(-1)) = 2$. Substitusi nilai ini menghasilkan $f_1(2) = 9$. Hasil numerik dan visualisasi grafik secara tepat mengidentifikasi Supremum $Sup = 9$ pada $x = 2{,}0000$. Karena $f(2) = 9$ dan 9 adalah batas atas terkecil, maka supremum tercapai pada domain [0,3].

Fungsi Rasional Terbatas (f_2)

Fungsi $f_2(x) = \frac{1}{(x-2)^2+0.1}$ mencapai nilai maksimum ketika penyebutnya mencapai nilai minimum. Karena $(x-2)^2 \geq 0$, nilai minimum penyebut adalah 0.1 yang terjadi tepat pada $x = 2$. Nilai supremum analitisnya adalah:

$$f_2(2) = \frac{1}{0.1} = 10$$

Visualisasi grafik menunjukkan puncak yang sangat tajam pada $x = 2$. Hasil perhitungan numerik yang menggunakan metode grid search (pencarian berdasarkan sampel diskrit) menunjukkan nilai supremum ≈ 9.9996 pada $x \approx 1.9980$. Perbedaan kecil ini (10 vs. 9.9996) terjadi karena keterbatasan diskretisasi domain; meskipun titik $x = 2$ berada dalam grid, metode pencarian numerik mungkin memilih titik sampel terdekat yang menghasilkan nilai sedikit di bawah supremum analitis akibat resolusi grid yang terbatas.

e-ISSN : 3062-8652; p-ISSN : 3048-1732; Hal. 01-12

Namun demikian, hasil ini menunjukkan akurasi tinggi metode numerik dalam mendekati nilai supremum analitis $Sup = 10$. Dengan demikian, supremum tercapai pada domain [0,4].

Fungsi Berpotongan/Diskontinu (f_3)

Fungsi f_3(Piecewise) adalah sebagai berikut:

$$f_3(x) = \begin{cases} x+1, & x < 2 \\ 5, & x = 2 \\ -x+7, & x > 2 \end{cases}$$

Analisis batas menunjukkan:

$$\lim_{x \to 2^-} f_3(x) = 2 + 1 = 3$$

Nilai fungsi pada diskontinuitas: $f_3(2) = 5$

$$\lim_{x \to 2^+} f_3(x) = -2 + 7 = 5$$

Meskipun terdapat diskontinuitas pada $x = 2$, nilai tertinggi yang dicapai fungsi pada domain [0,4]adalah nilai fungsi pada titik tersebut, yaitu:

$$f_3(2) = 5$$

Hasil perhitungan menunjukkan supremum $Sup = 5$ pada $x = 2$. Visualisasi grafik menunjukkan nilai sampel tertinggi mendekati 5($S \approx 4.9980$ pada $x \approx 2.0020$ di grafik yang lebih akurat). Kasus ini menyoroti bahwa supremum dapat terjadi tepat pada titik tunggal yang terpisah (diskontinu) dari limit fungsi di sekitarnya. Supremum tercapai. Keterbatasan metode numerik dalam memvisualisasikan gap dan titik tunggal yang presisi harus tetap diimbangi dengan verifikasi analitis.

Fungsi Asimtotik Tak Terbatas (f_4)

Fungsi $f_4(x) = 1/(x-3)^2$ memiliki asimtot vertikal pada $x = 3$. Ketika x mendekati 3, nilai $(x-3)^2$ mendekati nol positif, menyebabkan $f_4(x) \to \infty$. Secara matematis, fungsi yang tidak terbatas (*unbounded*) pada interval domainnya tidak memiliki batas atas terkecil dalam himpunan bilangan real ($\mathbb{R}$). Oleh karena itu, supremumnya adalah $Sup = \infty$, dan supremum “tidak tercapai” (karena ∞bukan merupakan anggota domain fungsi). Visualisasi grafik kedua memperingatkan tentang “Supremum tak hingga!”, yang merupakan interpretasi yang paling akurat untuk kasus ini.

Secara keseluruhan, hasil numerik yang disajikan dalam Tabel 1 dan visualisasi grafik kedua memverifikasi prinsip-prinsip penentuan supremum. Pada kasus terbatas (bounded), supremum dari fungsi terbatas (f_1, f_2, f_3) berhasil diidentifikasi sebagai nilai maksimum global atau nilai batas tertinggi yang dicapai, meskipun terjadi di titik singular atau diskontinu. Pada kasus tak terbatas (*unbounded*), supremum dari fungsi tak terbatas (f_4) secara tepat diidentifikasi sebagai ∞, yang menunjukkan bahwa batas atas terkecil tidak ada di $\mathbb{R}$. Metode perhitungan numerik dan visualisasi yang digunakan dalam penelitian ini terbukti akurat dalam mengidentifikasi dan menginterpretasikan supremum pada berbagai tipe fungsi real berdimensi satu.

5. KESIMPULAN DAN SARAN

Penelitian ini membuktikan bahwa metode komputasi numerik dengan pendekatan *grid search* mampu mengidentifikasi supremum pada berbagai tipe fungsi real berdimensi satu dengan akurasi yang baik. Supremum berhasil ditentukan pada fungsi terbatas dengan nilai Sup = 9 untuk fungsi parabolik, Sup ≈ 10 untuk fungsi rasional, dan Sup = 5 untuk fungsi diskontinu *piecewise*, sedangkan pada fungsi dengan asimtot vertikal, metode ini tepat mengidentifikasi supremum sebagai nilai tak hingga. Visualisasi grafik memberikan verifikasi tambahan yang mendukung hasil perhitungan numerik dan membantu memahami perilaku fungsi di sekitar titik supremum.

Namun demikian, penelitian ini memiliki keterbatasan utama pada resolusi diskretisasi domain yang mempengaruhi akurasi hasil, terutama terlihat pada fungsi rasional yang menghasilkan deviasi kecil (nilai numerik 9.9996 pada $x \approx 1.998$ dibanding nilai analitis 10 pada $x = 2$). Penelitian juga terbatas pada fungsi berdimensi satu dengan domain tertutup saja.

Untuk pengembangan lebih lanjut, disarankan menggunakan metode optimasi yang lebih adaptif seperti algoritma berbasis gradien untuk meningkatkan presisi pada fungsi dengan karakteristik khusus. Penelitian berikutnya bisa diperluas ke fungsi multivariat atau eksplorasi domain terbuka yang memiliki tantangan lebih kompleks dalam penentuan supremum. Penerapan metode *symbolic computation* juga dapat dipertimbangkan untuk mendapatkan hasil yang lebih eksak dan mengatasi masalah diskretisasi. Selanjutnya, akan menarik jika konsep supremum ini diaplikasikan dalam konteks optimasi praktis seperti pada bidang *machine learning* atau ekonomi untuk melihat relevansinya dalam penyelesaian masalah nyata.

UCAPAN TERIMA KASIH

Penulis menyampaikan terima kasih kepada Bapak Tri Andri Hutapea, S.Si., M.Sc. selaku pembimbing yang telah memberikan arahan dan bimbingan selama proses penelitian.

Ucapan terima kasih juga disampaikan kepada Program Studi Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Negeri Medan atas dukungan fasilitas yang memungkinkan terlaksananya penelitian ini. Penulis juga berterima kasih kepada reviewer dan editor jurnal atas saran perbaikan yang berharga untuk penyempurnaan artikel ini.

DAFTAR REFERENSI

Ardhani, D. C., Solikah, N. H., & Wibowo, A. (2025). Pemanfaatan Python dalam penyelesaian SPL dengan metode iterasi Jacobi dan Gauss-Seidel. J-PiMat, 7(1), 1687–1694. https://jurnal.stkippersada.ac.id/jurnal/index.php/jpimat/article/download/4665/pdf

Bartle, R. G., & Sherbert, D. R. (2010). Introduction to real analysis fourth edition. John Wiley & Sons, Inc.

Darmadi, Sanusi, & Rifai, M. (2024). Analisis penerapan pembelajaran diferensiasi pada mata kuliah analisis real. Jurnal Cakrawala Akademika, 1(3), 625–636. https://doi.org/10.70182/JCA.v1i3.41

Ekayanti, A. (2018). Generalisasi teorema aproksimasi Weierstrass. FIBONACCI: Jurnal Pendidikan Matematika dan Matematika, 4(2), 105–112. https://jurnal.umj.ac.id/index.php/fbc/article/view/2656/2798

Kartika, E. D., & Yazidah, N. I. (2019). Analisis kemampuan pembuktian matematis pada mata kuliah analisis real berdasarkan adversity quotient. Prima: Jurnal Pendidikan Matematika, 3(2), 152. https://doi.org/10.31000/prima.v3i2.1385

Lutfi, M., & Ilham, A. (2025). Penerapan optimasi penjadwalan kerja dengan kendala operasional pada sistem industri menggunakan Python. Jurnal Komputer dan Teknologi Informasi, 5(1), 1–10. https://jurnal.unimus.ac.id/index.php/JKTI/article/download/16753/pdf

Mahmudy, W. F., & Rahman, Muh. A. (2011). Optimasi fungsi multi-obyektif berkendala menggunakan algoritma genetika adaptif dengan pengkodean real. Jurnal Ilmiah KURSOR, 6(1), 19–26.

Medyanti, W. A., Faisal, M., & Nurhayati, H. (2024). Optimasi metode single exponential smoothing dengan grid search pada prediksi nilai ekspor migas. SINTECH JOURNAL, 7(1), 59–69. https://doi.org/10.31598

Purba, D. L., Saragih, D. L., Haloho, E. C., Kaban, R. E. B., & Hutapea, T. A. (2025). Menentukan supremum dan infimum himpunan dengan Python. TEACHER : Jurnal Inovasi Karya Ilmiah Guru, 5(1), 38–48. https://jurnalp4i.com/index.php/teacher

Rachmatsyah, A. D., Sugihartono, T., & Irfan, K. (2025). Perbandingan teknik optimasi grid search dan randomized search dalam meningkatkan akurasi metode klasifikasi SVM pada sentimen ulasan pengguna aplikasi JKN Mobile. SKANIKA: Sistem Komputer dan Teknik Informatika, 8(1), 13–22. https://doi.org/10.36080/skanika.v8i1.3328

Setiawati, E., Gusnita, W., Kurniati, A., Yuniati, S., & Rahmi, D. (2025). Implementasi konsep analisis real dalam penyelesaian masalah matematika. Bilangan : Jurnal Ilmiah Matematika, Kebumian dan Angkasa, 3(5), 18–26. https://doi.org/10.62383/bilangan.v3i5.774

Surbakti, N. M., Angelyca, A., Talia, A., Perangin-Angin, C. B., Nainggolan, D. O., Friskauly, N. D., & Tumorang, S. R. B. (2024). Penggunaan bahasa pemrograman Python dalam pembelajaran kalkulus fungsi dua variabel. Algoritma : Jurnal Matematika, Ilmu Pengetahuan Alam, Kebumian dan Angkasa, 2(3), 98–107. https://journal.arimsi.or.id/index.php/Algoritma/article/view/67

Widodo, S., & Katminingsih, Y. (2018). Pengantar analisis real. Fakultas Teknik Universitas Nusantara PGRI Kediri.

Winanti, F., Hidayah, A., Purba, M. A., T, R. S., & Sitorus, N. A. (2024). Penggunaan Python dalam menyelesaikan permasalahan supremum dan infimum suatu himpunan. Pentagon : Jurnal Matematika Dan Ilmu Pengetahuan Alam, 2(4), 12–23.