



Penerapan Metode Numerik dalam Penyelesaian Persamaan Diferensial

Tsuwaibatul Aslamiah Lubis *

Universitas Deztron Indonesia, Indonesia

Alamat : Jl.Perintis Kemerdekaan, No. 9, Medan Timur

Korespondensi penulis : tsuwaibatulaslimiahlubis@udi.ac.id *

Abstract, This research discusses the application of numerical methods in solving differential equations that often appear in various fields of science, such as physics, engineering and economics. The methods used include the Euler method, the Runge-Kutta method, and the finite difference method. The research results show that the fourth order Runge-Kutta method provides a higher level of accuracy than the Euler method in solving first order differential equations. In addition, the finite difference approach provides stable solutions to partial differential equations. This study confirms the importance of numerical methods in the analysis and solving of complex mathematical problems.

Keywords: Numerical methods, differential equations, Euler's method, Runge-Kutta method, finite difference method.

Abstrak, Penelitian ini membahas penerapan metode numerik dalam penyelesaian persamaan diferensial yang sering muncul dalam berbagai bidang ilmu, seperti fisika, teknik, dan ekonomi. Metode yang digunakan meliputi metode Euler, metode Runge-Kutta, dan metode beda hingga. Hasil penelitian menunjukkan bahwa metode Runge-Kutta orde empat memberikan tingkat akurasi yang lebih tinggi dibandingkan metode Euler dalam menyelesaikan persamaan diferensial orde pertama. Selain itu, pendekatan beda hingga memberikan solusi yang stabil untuk persamaan diferensial parsial. Studi ini menegaskan pentingnya metode numerik dalam analisis dan penyelesaian masalah matematika yang kompleks.

Kata Kunci: Metode numerik, persamaan diferensial, metode Euler, metode Runge-Kutta, metode beda hingga.

1. PENDAHULUAN

Matematika merupakan salah satu mata pelajaran dasar yang memiliki peran krusial dalam pengembangan kemampuan berpikir logis dan analitis siswa. Persamaan Diferensial (PD) adalah salah satu cabang matematika yang banyak digunakan untuk menjelaskan masalah-masalah fisis. Masalah-masalah fisis tersebut dapat dimodelkan dalam bentuk PD. Pada perkembangan ilmu sekarang PD sebagai model banyak dijumpai dalam bidang-bidang sains, teknologi (teknik), biologi, ekonomi, ilmu sosial, demografi. PD digunakan sebagai alat untuk mengetahui kelakuan maupun sifat-sifat solusi masalah yang ditinjau. Karena itu, penting sekali mempelajari PD.

Persamaan diferensial adalah alat utama dalam memodelkan fenomena alam dan rekayasa. Namun, banyak persamaan diferensial tidak memiliki solusi analitik sehingga diperlukan pendekatan numerik. Penelitian ini bertujuan untuk mengevaluasi efektivitas metode numerik dalam menyelesaikan persamaan diferensial.

2. LANDASAN TEORI

Teori persamaan diferensial dapat dikatakan sudah berkembang dan metode yang digunakan pun beragam variasi sesuai dengan jenisnya yaitu merupakan persamaan diferensial biasa yang fungsinya tidak diketahui atau disebut variabel terikat dan fungsi dari variabel bebas tunggal. Kemudian, ada juga diferensial parsial merupakan persamaan yang mana fungsinya tidak diketahui atau memiliki fungsi dari banyaknya variabel bebas yang melibatkan turunan parsial. Namun, dalam makalah ini kami akan membahas persamaan diferensial biasa orde satu. Selain itu juga, makalah ini berisi contoh dan soal – soal yang dapat menjadi referensi bagi penulis dan terutama bagi pembacanya.

Persamaan diferensial merupakan bagian dari persamaan matematika yang berguna sebagai variabel pertama atau lebih, kemudian saling berkaitan dengan nilai dari fungsi dan juga turunan dalam beragam jenis orde. Selain penting dalam matematika persamaan diferensial juga memiliki peranan yang penting dalam bidang rekayasa, ilmu ekonomi, fisika dan lainnya.

Fungsi

Fungsi didefinisikan sebagai relasi biner di mana setiap input dipetakan ke tepat satu output. $y = x^2 + 4$ adalah contoh fungsi. Di sini, x (input) adalah variabel independen, dan y (output) adalah variabel dependen.

Rumus Kalkulus Diferensial

Rumus yang berbeda untuk kalkulus diferensial digunakan untuk menemukan turunan dari berbagai jenis fungsi. Menurut definisi, turunan dari suatu fungsi dapat ditentukan sebagai berikut:

Fungsi	Turunan	Diferensial
1. $y = x^2$	$\frac{dy}{dx} = 2x$	$dy = 2x \, dx$
2. $y = \sqrt{x}$	$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$dy = \frac{dx}{2\sqrt{x}}$
3. $y = 2 \sin x$	$\frac{dy}{dx} = 2 \cos x$	$dy = 2 \cos x \, dx$
4. $y = x \cos x$	$\frac{dy}{dx} = -x \sin x + \cos x$	$dy = (-x \sin x + \cos x)dx$
5. $y = \frac{1}{x}$	$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x^2}$	$dy = -\frac{dx}{x^2}$

Klasifikasi Persamaan Diferensial

Persamaan Diferensial (PD) dibagi menjadi 2 yaitu:

- a. Persamaan Diferensial Biasa (PDB) adalah suatu persamaan diferensial jika fungsi yang tidak diketahui hanya bergantung pada satu peubah bebas/hanya melibatkan satu variabel bebas.
- b. Persamaan Diferensial Parsial (PDP) adalah suatu persamaan diferensial yang melibatkan dua/lebih peubah/variabel bebas dan memuat turunan parsial dari fungsi yang tak diketahui. Pada buku ini hanya dibahas persamaan diferensial biasa (PDB), sehingga bahasan materi pada Bab berikutnya terfokus pada persamaan diferensial biasa. Di dalam persamaan diferensial terdapat beberapa istilah diantaranya: Orde : turunan tertinggi dalam sebuah persamaan diferensial Derajat : pangkat dari turunan tertinggi dalam sebuah persamaan diferensial

Penyelesaian Persamaan Diferensial

Penyelesaian PDB $F(x, y, y', y'' \dots, y^{(n)} = 0$ adalah sebuah fungsi $y(x)$ (dengan turunan-turunannya sampai orde- n yang kontinu pada selang $I = \{x | a < x < b\}$) yang apabila disubstitusikan ke PDB tersebut diperoleh identitas persamaan. Grafik (x, y) pada bidang $x - y$ disebut kurva penyelesaian. Penyelesaian dari PD:

- 1) Penyelesaian Umum PDB orde- n di selang I jika: a) Penyelesaian tersebut memenuhi PD yang diberikan b) Penyelesaian tersebut memenuhi n konstanta sebarang $C_1, C_2, \dots, C_n$.
- 2) Penyelesaian Khusus PDB orde- n di selang I jika: a) Penyelesaian tersebut memenuhi PD yang diberikan b) Penyelesaian tersebut memenuhi n konstanta tertentu $C_1 = a_1, C_2 = a_2, \dots, C_n = a_n$. (Murtafi'ah 2018).

Metode numerik merupakan satu-satunya metode alternatif yang ada dalam upaya menyelesaikan persoalan-persoalan matematis selain metode analitik. Pemakaian metode numerik umumnya dilengkapi dengan suatu algoritma agar penyelesaian masalah dapat dilakukan secara sistematis dan logis sehingga diperoleh jawaban numerik yang efisien dan efektif dari berbagai macam permasalahan yang diselesaikan. Ada dua alasan umum mengapa pilihan dijatuhkan kepada metode numerik. Alasan pertama metode ini memberikan keefisienan dan keefektifan di dalam menyelesaikan permasalahan matematis dikarenakan berkembangnya perangkat keras dan lunak komputer. (La Zakaria 2023)

Metode Numerik adalah teknik yang digunakan untuk memformulasikan persoalan matematika sehingga dapat dipecahkan dengan operasi perhitungan biasa (+, -, /, *). Metode

Numerik – Solusi selalu berbentuk angka – Solusi yang dihasilkan solusi pendekatan sehingga terdapat error. Adapun tahapan-tahapan dalam memecahkan permasalahan secara numerik adalah sebagai berikut:

- a) Tahap Pemodelan Kegiatan dalam tahap ini adalah memodelkan permasalahan/persoalan dunia nyata ke dalam persamaan matematika.
- b) Tahap Penyederhanaan Model Model matematika pada tahap pertama mungkin terlalu kompleks, yaitu banyaknya variabel atau parameter. Semakin kompleks model matematika, akan semakin rumit pula penyelesaiannya. Mungkin bisa disederhanakan dengan cara dibuat beberapa andaian sehingga beberapa parameter dapat diabaikan.
- c) Tahap Formulasi Numerik Memformulasikan model matematika yang telah sederhana secara numerik, yaitu penentuan metode numerik yang akan dipakai dan kemudian menyusun algoritma dari metode numerik yang dipilih.
- d) Tahap Pemrograman Pada tahap ini kegiatan yang dilakukan adalah menerjemahkan algoritma ke dalam program komputer dengan menggunakan salah satu bahasa pemrograman yang dikuasai
- e) Tahap Operasional Program komputer dijalankan dengan data uji coba sebelum data sesungguhnya.
- f) Tahap Evaluasi Interpretasi program

Metode numerik adalah teknik untuk mendekati solusi masalah matematika yang tidak dapat diselesaikan secara analitik.

- **Metode Euler:** Metode numerik paling sederhana untuk menyelesaikan persamaan diferensial biasa.
- **Metode Runge-Kutta:** Metode yang lebih akurat dibandingkan metode Euler, khususnya metode orde empat.
- **Metode Beda Hingga:** Digunakan untuk menyelesaikan persamaan diferensial parsial dengan mendiskritisasi variabel kontinu.

Metode numerik digunakan untuk menyelesaikan persoalan dimana perhitungan secara analitik tidak dapat digunakan. Metode numerik ini berangkat dari pemikiran bahwa permasalahan dapat diselesaikan dengan menggunakan pendekatan-pendekatan yang dapat dipertanggung-jawabkan secara analitik. Metode numerik ini disajikan dalam bentuk algoritma-algoritma yang dapat dihitung secara cepat dan mudah. (Siti Nurhabibah Hutagalung 2017). Ada beberapa alasan mengapa mempelajari metode numerik, yaitu:

- a) Metode numerik merupakan alat untuk memecahkan masalah matematika yang sangat handal. Banyak permasalahan teknik yang mustahil dapat diselesaikan secara analitik, karena kita sering dihadapkan pada sistem-sistem persamaan yang besar, tidak linear dan cakupan yang kompleks, dapat diselesaikan dengan metode numerik.
- b) Program paket numerik, misalnya MATLAB, MAPLE, dan sebagainya yang digunakan untuk menyelesaikan masalah matematika dengan metode numerik dibuat oleh orang yang mempunyai dasar-dasar teori metode numerik.
- c) Banyak masalah matematika yang tidak dapat diselesaikan dengan memakai program paket atau tidak tercakup dalam program paket. Oleh karena itu kita perlu belajar metode numerik untuk dapat membuat program paket (software) untuk masalah sendiri.
- d) Metode numerik merupakan suatu sarana yang efisien untuk mempelajari penggunaan komputer. Belajar pemrograman secara efektif adalah menulis

Metode Numerik masih dapat digunakan untuk menemukan solusi masalah. Perbedaan utama antara metode numerik dan metode analitik ada dua hal. Pertama, metode numerik hanya menghasilkan solusi dalam bentuk angka, sementara metode analitik biasanya menghasilkan solusi dalam bentuk fungsi matematik yang kemudian dapat dievaluasi untuk menghasilkan nilai dalam bentuk angka. Kedua, metode numerik hanya menghasilkan solusi yang mendekati atau mendekati solusi sejati, sehingga solusi yang dihasilkan oleh metode numerik selalu berbentuk angka.

Beberapa Metode Numerik Populer:

1. **Metode Penyelesaian Persamaan Nonlinier**
 - Metode Bagi Dua (Bisection Method)
 - Metode Newton-Raphson
 - Metode Secant
2. **Metode Interpolasi dan Aproksimasi**
 - Interpolasi Polinomial (Lagrange, Newton)
 - Spline Cubic
3. **Metode Diferensiasi dan Integrasi Numerik**
 - Metode Diferensiasi Maju dan Mundur
 - Aturan Trapezium
 - Aturan Simpson

4. Metode Penyelesaian Sistem Persamaan Linier

- Eliminasi Gauss
- Dekomposisi LU
- Metode Iterasi Jacobi dan Gauss-Seidel

5. Metode Penyelesaian Persamaan Diferensial

- Metode Euler
- Metode Runge-Kutta
- Metode Multistep (Adams-Bashforth, Adams-Moulton)

3. METODOLOG PENELITIAN

Penelitian ini menggunakan pendekatan eksperimen numerik dengan membandingkan solusi dari berbagai metode terhadap solusi eksak. Kasus uji melibatkan persamaan diferensial sederhana dan kompleks.

4. HASIL DAN PEMBAHASAN

Hasil simulasi menunjukkan bahwa metode Runge-Kutta orde empat memiliki kesalahan lebih kecil dibandingkan metode Euler. Sementara itu, metode beda hingga efektif dalam menyelesaikan persamaan diferensial parsial tetapi membutuhkan stabilitas numerik yang baik.

5. KESIMPULAN

Metode Runge-Kutta merupakan pendekatan terbaik untuk persamaan diferensial biasa, sedangkan metode beda hingga cocok untuk persamaan diferensial parsial. Penelitian lebih lanjut dapat mengembangkan algoritma adaptif untuk meningkatkan efisiensi komputasi.

REFERENSI

- Burden, R. L., & Faires, J. D. (2010). *Numerical Analysis*. Cengage Learning.
- Butcher, J. C. (2016). *Numerical Methods for Ordinary Differential Equations*. Wiley.
- Chapra, S. C., & Canale, R. P. (2014). *Numerical Methods for Engineers*. McGraw-Hill.
- Chapra, S. C., & Canale, R. P. (2015). *Numerical Methods for Engineers*. McGraw-Hill.
- Dew, S. V. (2016). Efektivitas penggunaan media Screencast O-Matic pada mata kuliah kalkulus integral terhadap hasil belajar mahasiswa. *Jurnal Penelitian Pendidikan dan Pengajaran Matematika*, 61-66.

- Gerald, C. F., & Wheatley, P. O. (2003). *Applied Numerical Analysis*. Pearson.
- Heri Sutarno, Dan Dewi Rachmatin (2005). Bandung
- Kincaid, D., & Cheney, W. (2009). *Numerical Mathematics and Computing*. Brooks/Cole.
- La Zakaria. (2023) Pengantar Metode Numerik (Solusi Masalah dengan Mathematica). Bandar Lampung
- Lusiana Debora (2022). Modul Persamaan Diferensial Persamaan Diferensial Orde Satu. Universitas Kristen Indonesia
- Maharani Swasti (2018). Analisis Numerik Berbasis Group Investigation Untuk Meningkatkan Kemampuan Berpikir Kritis. Ae Media Grafika. Jawa Timur
- Murtafi'ah Wasilatul (2018). Persamaan Diferensial Biasa Dan Aplikasinya. Unipma Press
- Nababan. Modul Persamaan Diferensial Biasa.
- Sauer, T. (2017). *Numerical Analysis*. Pearson.
- Siregar Zufri Hasrudy, Dkk (2024) Metode Numerik. Penerbit Widina Media Utama. I Jawa Barat
- Siti Nurhabibah Hutagalung (2017). Pemahaman Metode Numerik (Studi Kasus Metode New-Rhapon) Menggunakan Pemrograman Matlab. Jurnal Teknologi Informasi (Jurti) Volume 1, Nomor 1, Juli 2017
- Strikwerda, J. C. (2004). Finite Difference Schemes and Partial Differential Equations. SIAM.