

Pemodelan Konveksi Panas Pada Fluida Statis dan Dinamis Dalam Bentuk Persamaan Diferensial Orde 1

Eka Finanti Simamora¹, Nurcahaya Br Zandroto², Putri Tarigan³,
Vico Putra Sidauruk⁴, Fevi Rahmawati Suwanto⁵

^{1,2,3,4,5} Universitas Negeri Medan

Email: ekasimamora31@gmail.com nurcahayazandroto@gmail.com ptarigan74@gmail.com
vico23jan@gmail.com fevirahmawati@unimed.ac.id

Abstract. This article discusses the importance of understanding heat convection in fluids in the context of physics and engineering. Using first order Simple Differential Equations (PDS), we can analyze the temperature distribution in a fluid over time and space in high detail. PDS allows modeling heat convection by considering parameters such as temperature differences and fluid flow velocity. Numerical methods are used to complete the PDS computationally, while data collection techniques through literature studies provide an in-depth understanding of relevant theories and previous findings. With the application of PDS and numerical methods, we can better understand and predict heat transfer in fluids, which has wide applications in engineering, biology, and physics. In conclusion, this article provides a comprehensive insight into the use of PDS in the analysis of heat convection in static and dynamic fluids, with a focus on mathematical and computational approaches to better understand this phenomenon.

Keywords : Fluids, First Order, Differential Equations

Abstrak. Artikel ini membahas pentingnya pemahaman tentang konveksi panas dalam fluida dalam konteks ilmu fisika dan rekayasa. Menggunakan Persamaan Diferensial Sederhana (PDS) orde satu, kita dapat menganalisis distribusi suhu dalam fluida sepanjang waktu dan ruang dengan detail tinggi. PDS memungkinkan pemodelan konveksi panas dengan mempertimbangkan parameter seperti perbedaan suhu dan kecepatan aliran fluida. Metode numerik digunakan untuk menyelesaikan PDS secara komputasional, sementara teknik pengumpulan data melalui studi pustaka memberikan pemahaman mendalam tentang teori dan temuan terdahulu yang relevan. Dengan penerapan PDS dan metode numerik, kita dapat memahami dan memprediksi perpindahan panas dalam fluida dengan lebih baik, yang memiliki aplikasi luas dalam rekayasa, biologi, dan fisika. Kesimpulannya, artikel ini memberikan wawasan yang komprehensif tentang penggunaan PDS dalam analisis konveksi panas dalam fluida statis dan dinamis, dengan fokus pada pendekatan matematis dan komputasional untuk memahami fenomena ini dengan lebih baik.

Kata kunci: Fluida, Orde satu, Persamaan Diferensial

LATAR BELAKANG

Salah satu fenomena penting dalam ilmu fisika dan rekayasa adalah konveksi panas dalam fluida. Perpindahan panas melalui fluida yang bergerak adalah bagian dari proses ini. Aliran udara di sekitar struktur hingga aliran magma di dalam bumi adalah beberapa situasi yang dapat terjadi selama proses ini. Sangat penting untuk memahami mekanisme konveksi panas dalam banyak aplikasi teknik, seperti membuat sistem pemanasan dan pendinginan dan memodelkan perubahan iklim global. Berdasarkan penelitian sebelumnya ditemukan fakta bahwa masih banyak peserta didik yang sering menghadapi kesulitan dalam memahami konsep dan menyelesaikan soal-soal yang terkait dengan perpindahan panas dalam fluida. Maka untuk membantu menghadapi fenomena ini, Persamaan Diferensial Sederhana (PDS) dapat digunakan menjadi alat untuk menyelesaikan persoalan yang terkait dengan konveksi panas dalam fluida.

Received: Mei 31, 2024; Accepted: Juni 24, 2024; Published: Agustus 31, 2024

* Eka Finanti Simamora, ekasimamora31@gmail.com

PDS adalah kerangka matematika yang memungkinkan kita untuk merumuskan dan menganalisis persamaan yang menggambarkan perilaku suhu dalam fluida sepanjang waktu dan ruang. Dengan menggunakan PDS, kita dapat memodelkan konveksi panas dalam fluida dengan tingkat detail yang tinggi, memperhitungkan berbagai parameter yang memengaruhi fenomena ini, seperti perbedaan suhu, kecepatan aliran, dan sifat termal fluida.

PDS adalah alat yang sangat berguna dalam analisis konveksi panas karena memungkinkan kita untuk mendapatkan pemahaman yang lebih baik tentang distribusi suhu dalam fluida yang bergerak. Dengan merumuskan persamaan matematis yang tepat, kita dapat memprediksi bagaimana suhu fluida akan berubah seiring posisi dan waktu dalam ruang. Selain itu, penggunaan PDS dalam analisis konveksi panas memungkinkan penggunaan metode numerik dalam menyelesaikan persamaan yang dihasilkan. Metode numerik memungkinkan kita untuk mendekati solusi PDS secara komputasional. Ketika solusi analitik tidak dapat diperoleh atau ketika kita memerlukan estimasi suhu yang cepat dan akurat, ini sangat membantu.

Selain itu, artikel ini juga akan membahas berbagai jenis fluida yang berbeda, termasuk fluida statis dan dinamis. Setiap jenis fluida memiliki karakteristik dan perilaku yang unik, dan akan dianalisis menggunakan persamaan diferensial orde satu untuk memahami perubahan suhu dan perilaku fluida tersebut. Dengan demikian, artikel ini akan memberikan pemahaman yang komprehensif tentang konveksi panas dalam berbagai jenis fluida dan bagaimana kita dapat menganalisisnya menggunakan persamaan diferensial orde satu.

KAJIAN TEORITIS

Persamaan Diferensial Orde Satu

Persamaan diferensial adalah persamaan yang memiliki satu atau lebih turunan. Persamaan diferensial orde satu hanya melibatkan turunan pertama dari fungsi. Bentuk umum persamaan diferensial orde satu yaitu

$$y' + h(x)y = g(x)$$

Dalam menentukan solusi atau penyelesaian persamaan diferensial orde satu diperlukan factor integrasi yang dinyatakan sebagai

$$I(x) = e^{\int h(x)dx}$$

Faktor integrasi itu akan digunakan untuk menentukan solusi persamaan yang dinyatakan sebagai

$$y = \frac{1}{I(x)} \left(\int I(x) \cdot g(x) dx + c \right)$$

Penerapan Persamaan Diferensial Orde Satu Pada Konveksi Panas Dalam Fluida

Transmisi energi panas dalam sistem fisik bergantung pada suhu dan tekanan, dengan menghilangkan panas yang digambarkan dengan transformasi panas, panas umumnya ditransformasikan secara konduksi atau difusi, konveksi dan radiasi. Panas selalu ditransmisikan oleh salah satu dari tiga mode berikut .

- Perpindahan panas melalui konduksi dalam bentuk padat
- Perpindahan panas melalui konveksi dalam fluida
- Pemindahan panas melalui radiasi di ruang angkasa.

Zat padat memiliki kontak dengan fluida pada suhu yang berbeda. Dengan demikian, panas mengalir dalam zat padat secara konduksi yang dapat ditentukan oleh hukum Fourier dalam zat padat panas selalu mengalir dari suhu tinggi ke suhu rendah. Tetapi dalam fluida panas mengalir secara konveksi, dapat dihitung dengan hukum pendinginan Newton. Hukum pendinginan Newton menyatakan tentang laju gradien temperatur suatu materi sebanding dengan gradien temperatur materi dan temperatur sekitarnya. Formula dari hukum ini yaitu

$$Q = h \cdot A \cdot (T(t) - T_f)$$

Keterangan:

Q = Laju perpindahan kalor

h = Koefisien perpindahan kalor

A = Luas permukaan perpindahan kalor

$T(t)$ = Suhu benda yang bergantung pada waktu

T_f = Suhu Lingkungan

Dalam persamaan di atas, koefisien h memenuhi transformasi panas antara fluida padat dan fluida curah. Hukum termodinamika pertama juga mensyaratkan bahwa, untuk menghasilkan perubahan suhu pada benda padat $\Delta T(t)$ selama periode waktu Δt dapat diperoleh dengan prinsip.

$$-\rho c V \Delta T(t) = Q = h A [T(t) - T_f] \Delta t$$

Keterangan :

ρ = Massa jenis benda

c = Kalor jenis

V = Volume

Δt = Perubahan waktu

Dari persamaan diatas maka didapat :

$$-\rho c V \Delta T(t) = h A [T(t) - T_f] \Delta t$$

$$\frac{\Delta T(t)}{\Delta t} = -\frac{h}{\rho c V} A [T(t) - T_f]$$

Dari persamaan diatas h, ρ, c dan V disisi kanan adalah konstan. Maka simbolnya dapat disederhanakan menjadi α dengan $\alpha = \frac{h}{\rho c V} A$, sehingga :

$$\frac{\Delta T(t)}{\Delta t} = -\alpha A [T(t) - T_f]$$

Nilai αA merupakan suatu konstanta pendinginan, sehingga simbolnya dapat diganti menjadi K , dimana $K = \alpha A$. Maka bentuk persamaan diferensial persamaan diatas yaitu

$$\frac{dT(t)}{dt} = -K [T(t) - T_f]$$

$$\frac{dT(t)}{[T(t) - T_f]} = -K dt$$

Kemudian dengan mengintegrasikan persamaan tersebut, diperoleh

$$\ln(T(t) - T_f) = -Kt + C$$

$$T(t) = T_f + C e^{-Kt}$$

Konstanta C dapat diketahui dengan mempertimbangkan suhu awal benda. Jika pada waktu awal atau $t=0$, maka

$$T(0) = T_f + C e^{-K \cdot 0}$$

$$T(0) = T_f + C$$

$$C = T(0) - T_f$$

Jadi, bentuk akhir dari rumus Hukum Pendinginan Newton adalah

$$T(t) = T_f + (T(0) - T_f) e^{-Kt}$$

Jenis-jenis Fluida

Fluida adalah zat yang dapat mengalir. Kata Fluida mencakup zat cair, air dan gas karena kedua zat ini dapat mengalir, sebaliknya batu dan benda-benda keras atau seluruh zat padat tidak digolongkan kedalam fluida karena tidak bisa mengalir. Berdasarkan pergerakannya, fluida dibagi menjadi fluida statis dan fluida dinamis. Fluida

Statis adalah fluida yang berada dalam fase tidak bergerak (diam) atau fluida dalam keadaan bergerak tetapi tak ada perbedaan kecepatan antar partikel fluida tersebut atau bisa dikatakan bahwa partikel-partikel fluida tersebut bergerak dengan kecepatan seragam sehingga tidak memiliki gaya geser. Contoh fluida statis seperti air bak, air Sungai dan lain sebagainya.

Fluida dinamis adalah fluida (bisa berupa zat cair, gas) yang bergerak. Untuk memudahkan dalam mempelajari, fluida disini dianggap steady (mempunyai kecepatan yang konstan terhadap waktu), tak termampatkan (tidak mengalami perubahan volume), tidak kental, tidak turbulen (tidak mengalami putaran-putaran). Contoh fluida dinamis terdapat pada sayap pesawat, sirkulasi darah melalui pembuluh darah, tekanan air, hambatan air, dan distribusi dalam air.

METODE PENELITIAN

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah metode numerik. Metode numerik adalah sebuah teknik penyelesaian pada permasalahan yang telah dirumuskan atau disusun dimana penyusunannya tersebut ditulis secara matematis dengan menggunakan operasi hitungan aritmatik (Kurang, tambah, kali, dan bagi). Dalam penelitian konveksi panas dalam fluida, metode numerik digunakan untuk menyelesaikan persamaan diferensial yang muncul dalam pemodelan. Teknik pengumpulan data melalui studi pustaka memberikan pemahaman yang mendalam tentang teori dan temuan terdahulu yang relevan dengan topik penelitian.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Pemodelan Konveksi Panas Fluida Dalam Bentuk Persamaan Orde Satu

Fluida Statis

Rumus konveksi panas pada fluida statis mirip dengan rumus Hukum Pendinginan Newton. Namun dalam hal ini, persamaan diturunkan bukan terhadap waktu namun terhadap jarak atau kedalaman.

$$T(x) = T_{\infty} + (T(0) - T_{\infty})e^{-\frac{h}{k}x}$$

Dimana

$T(x)$ = Suhu sepanjang jarak x

T_{∞} = Suhu air sungai yang jauh dari sumber panas

h = Koefisien konveksi panas

k = Konduktivitas termal

$T(0)$ = Suhu awal

Contoh :

Sebuah sungai memiliki sumber panas di dasar yang menyebabkan distribusi suhu di sepanjang sungai. Suhu air sungai jauh dari sumber panas adalah $T_{\infty} = 20^{\circ}C$. Koefisien Konveksi panas (h) adalah $5 \frac{W}{m^2}$, dan konduktivitas termal air (k) adalah $0.6 \frac{W}{m}$.

Pada jarak $x=0$ dari sumber panas, suhu air $T_0 = 80^{\circ}C$.

Tentukan distribusi suhu $T(x)$ di sepanjang jarak (x) dari sumber panas.

Diketahui :

$$T_{\infty} = 20^{\circ}C.$$

$$h = 5 \frac{W}{m^2}$$

$$k = 0.6 \frac{W}{m}$$

$$T_0 = 80^{\circ}C$$

Ditanya : $T(x)$?

Penyelesaian :

$$T(x) = T_{\infty} + (T(0) - T_{\infty})e^{-\frac{h}{k}x}$$

$$T(x) = 20 + (80 - 20)e^{-\frac{5}{0.6}x}$$

$$T(x) = 20 + 60 e^{-\frac{25}{3}x}$$

Maka distribusi suhu $T(x)$ di sepanjang jarak (x) dari sumber panas adalah

$$T(x) = 20 + 60 e^{-\frac{25}{3}x}.$$

Fluida Dinamis

Rumus konveksi panas pada fluida dinamis sama dengan rumus Hukum Pendinginan Newton.

$$T(t) = T_f + (T(0) - T_f)e^{-Kt}$$

Contoh 1

Sebuah bola logam dengan suhu awal $90^{\circ}C$ ditempatkan di dalam ruang pendingin dengan suhu $10^{\circ}C$. Jika luas permukaan bola adalah $0,25 m^2$ dan konduktivitas termal efektif $\alpha = 0,0015 m^2/s$, berapa lama waktu yang diperlukan agar suhu bola turun menjadi $12^{\circ}C$?

Penyelesaian :

1. Data yang diberikan

- Suhu awal bola (T_0) = 90°C
- Suhu ruang pendingin (T_f) = 10°C
- Luas permukaan bola (A) = $0,25 \text{ m}^2$
- Konduktivitas termal efektif $\alpha = 0,0015 \text{ m}^2/\text{s}$
- Suhu akhir bola ($T(t)$) = 12°C

2. Menghitung konstanta Laju pendingin k :

$$k \approx \alpha \times A = 0,0015 \times 0,25 = 0,000375 \text{ s}^{-1}$$

3. Menggunakan rumus Eksponensial untuk mencari waktu pendinginan:

Rumus dasar hukum pendinginan Newton adalah :

$$T(t) = T_f + (T_0 - T_f) \cdot e^{-k}$$

Masukkan nilai yang diketahui ke rumus

$$12 = 10 + (90 - 10) \cdot e^{-0,000375t}$$

4. Menyelesaikan Persamaan untuk t :

$$12 = 10 + 80 \cdot e^{-0,000375t}$$

$$2 = 80 \cdot e^{-0,000375t}$$

$$\frac{2}{80} = e^{-0,000375t}$$

$$\frac{1}{40} = e^{-0,000375t}$$

Ambil logaritma alami di kedua sisi :

$$\ln\left(\frac{1}{40}\right) = -0,000375t$$

$$t = \frac{\ln\left(\frac{1}{40}\right)}{-0,000375t}$$

$$t = \frac{\ln(40)}{-0,000375t}$$

5. Menghitung Nilai t :

$$\ln(40) \approx 3,6889$$

$$t \approx \frac{3,6889}{0,000375}$$

$$t \approx 9837,07 \text{ s}$$

Jadi, waktu yang diperlukan adalah sekitar 9837 detik atau sekitar 2,73 jam.

Contoh 2

Sebuah loyang berisi kue pada suhu awal 50°F dimasukkan ke dalam oven bersuhu 400°F . Setelah satu jam, suhu kue menjadi 130°F . Hitunglah suhu kue setelah dua jam berada di dalam oven dan berapa lama waktu yang dibutuhkan agar suhu kue mencapai 200°F ?

Penyelesaian :

1. Temukan konstanta k

- Suhu awal kue $T(0) = 50^{\circ}\text{F}$
- Suhu lingkungan (oven) $T_f = 400^{\circ}\text{F}$
- Suhu kue setelah satu jam $T(1) = 130^{\circ}\text{F}$

Gunakan Solusi umum dari hukum pendingin Newton :

$$T(t) = T_f + (T_0 - T_f)e^{-k}$$

Substitusi nilai yang diberikan :

$$T(1) = 400 + (50 - 400)e^{-k \cdot 1}$$

$$130 = 400 - 350e^{-k}$$

$$130 - 400 = -350e^{-k}$$

$$-270 = -350e^{-k}$$

$$e^{-k} = \frac{270}{350}$$

$$e^{-k} = \frac{27}{35}$$

$$-k = \ln\left(\frac{27}{35}\right)$$

$$k = \ln\left(\frac{27}{35}\right)$$

2. Hitung suhu kue setelah dua jam

Gunakan nilai k yang sudah ditemukan, dan dihitung $T(2)$:

$$T(2) = 400 + (50 - 400)e^{-2k}$$

$$T(2) = 400 - 350e^{-2k}$$

Dengan $k = \ln\left(\frac{35}{27}\right)$:

$$e^{-2k} = \left(\frac{27}{35}\right)^2$$

Jadi:

$$T(2) = 400 - 350 \left(\frac{27}{35}\right)^2$$

Hitung nilai e^{-2k} :

$$e^{-2k} = \left(\frac{27}{35}\right)^2 = \left(\frac{27}{35}\right) \cdot \left(\frac{27}{35}\right) = \left(\frac{729}{1225}\right)$$

Substitusi nilai ini ke dalam persamaan suhu:

$$T(2) = 400 - 350 \cdot \frac{729}{1225}$$

$$T(2) = 400 - 350 \cdot 0,5955$$

$$T(2) = 400 - 208,425$$

$$T(2) \approx 191,575^\circ\text{F}$$

3. Waktu untuk mencapai suhu 200°F

Gunakan persamaan :

$$200 = 400 + (50 - 400) e^{-k}$$

$$200 = 400 - 350e^{-kt}$$

$$200 - 400 = -350e^{-kt}$$

$$-200 = -350e^{-kt}$$

$$e^{-kt} = \frac{200}{350}$$

$$e^{-k} = \frac{20}{35} = \frac{4}{7}$$

$$-kt = \ln\left(\frac{4}{7}\right)$$

$$t = -\frac{\ln\left(\frac{4}{7}\right)}{k}$$

Dengan $k = \ln\left(\frac{35}{27}\right)$:

$$t = -\frac{\ln\left(\frac{4}{7}\right)}{\ln\left(\frac{35}{27}\right)}$$

Hitung nilai t :

$$t = -\frac{\ln\left(\frac{4}{7}\right)}{\ln\left(\frac{35}{27}\right)}$$

Kita perlu menghitung nilai logaritma ini:

$$\ln\left(\frac{4}{7}\right) \approx -0,5596$$

$$\ln\left(\frac{35}{27}\right) \approx 0,2719$$

Jadi :

$$t = \frac{-0,5596}{0,2719} \approx 2,06 \text{ jam}$$

Maka suhu kue setelah dua jam adalah sekitar 191.575°F dan waktu yang dibutuhkan untuk mencapai suhu 200°F adalah sekitar 2,06 jam.

KESIMPULAN

Persamaan Diferensial Sederhana (PDS) orde satu diperkenalkan sebagai alat yang efektif dalam menganalisis distribusi suhu dalam fluida sepanjang waktu dan ruang. PDS memungkinkan pemodelan konveksi panas dengan detail tinggi, yang mempertimbangkan parameter seperti perbedaan suhu dan kecepatan aliran fluida. Dengan penerapan PDS dan metode numerik, kita dapat memahami dan memprediksi perpindahan panas dalam fluida dengan lebih baik, yang memiliki aplikasi luas dalam rekayasa, biologi, dan fisika. Maka secara matematis rumus yang digunakan untuk menghitung perubahan suhu pada fluida adalah $\frac{\Delta T(t)}{\Delta t} = -\alpha A [T(t) - T_f]$. Rumus konveksi fluida statis adalah $T(x) = T_\infty + (T(0) - T_\infty)e^{-\frac{h}{k}x}$. Rumus konveksi fluida dinamis adalah $T(t) = T_f + (T(0) - T_f)e^{-Kt}$.

DAFTAR REFERENSI

- Fajar Sumolepen. (n.d.). *Fluida statis dan dinamis*. Diakses dari https://www.academia.edu/28152595/FLUIDA_STATIS_DAN_DINAMIS pada tanggal 7 Juni 2024.
- Hidayat, T., Weni Gurita Aedi, & Lisda Fitriana Masitoh. (2022). *Metode numerik*. Tangerang Banten: Unpam Press.
- Nababan, S. M. (2014). *Persamaan diferensial biasa dalam persamaan diferensial orde satu*. Jakarta: Universitas Terbuka.
- Rehan, Z. (2020). Application of first-order differential equation to heat convection in fluid. *Journal of Applied Mathematics and Physics*, 8(08), 1456.
- White, F. M. (2011). *Fluid mechanics* (7th ed.). McGraw-Hill Education.