



Penerapan Teori Graf dalam Kehidupan Sehari-hari

M. Fiqram Chan Safetra¹, Nayla Desviona^{2*}, Helmina³, Amelia Rianti⁴,
M.Rezan Prayogi⁵

¹⁻⁵Universitas Muhammadiyah Jambi, Indonesia

*Penulis Korespondensi: nayladesviona@umjambi.ac.id

Abstract Graph theory as a branch of discrete mathematics has experienced significant development in its application to modern complex network systems, particularly in digital social networks and transportation systems. This research aims to analyze fundamental concepts of graph theory, examine characteristics of cycle detection algorithms along with their computational complexity, investigate their application in digital social network analysis, and explore their implementation in digital transportation system optimization. The research method employs a qualitative approach with library research focusing on scientific literature from 2020-2025 period from accredited academic databases such as Scopus, Web of Science, and IEEE Xplore, utilizing thematic analysis techniques to identify meaningful patterns from the examined literature. Research findings indicate that fundamental graph theory concepts including vertices, edges, and graph classifications form the foundation for relational structure modeling. Cycle detection algorithms such as Depth-First Search, Union-Find, and Tarjan demonstrate effectiveness with $O(V+E)$ complexity for large-scale graphs. Applications in digital social networks facilitate community identification through Multi-View Clustering, centrality analysis for influencer detection, and understanding viral information dissemination patterns. Implementation in digital transportation systems demonstrates route planning optimization using Dijkstra and Bellman-Ford algorithms, vulnerability analysis through articulation point and bridge identification, and bottleneck detection with betweenness centrality. The research concludes that integration of graph theory in discrete mathematics education enhances critical thinking skills and real-world application understanding, with recommendations for algorithm development for massive dynamic graphs and machine learning integration in graph algorithm optimization.

Keywords: Cycle Detection Algorithm; Digital Social Networks; Discrete Mathematics; Graph Theory; Transportation Systems.

Abstrak. Teori graf sebagai cabang matematika diskrit telah mengalami perkembangan signifikan dalam aplikasinya terhadap sistem jaringan kompleks modern, khususnya pada jaringan sosial digital dan sistem transportasi. Penelitian ini bertujuan menganalisis konsep fundamental teori graf, mengkaji karakteristik algoritma deteksi siklus beserta kompleksitas komputasionalnya, menginvestigasi penerapannya dalam analisis jaringan sosial digital, serta mengeksplorasi implementasinya dalam optimalisasi sistem transportasi digital. Metode penelitian menggunakan pendekatan kualitatif dengan studi kepustakaan yang berfokus pada literatur ilmiah periode 2020-2025 dari basis data akademik terakreditasi seperti Scopus, Web of Science, dan IEEE Xplore, dengan teknik analisis tematik untuk mengidentifikasi pola-pola makna dari literatur yang dikaji. Hasil penelitian menunjukkan bahwa konsep fundamental teori graf mencakup simpul, sisi, dan klasifikasi graf menjadi landasan pemodelan struktur relasional. Algoritma deteksi siklus seperti Depth-First Search, Union-Find, dan Tarjan menunjukkan efektivitas dengan kompleksitas $O(V+E)$ untuk graf berukuran besar. Penerapan pada jaringan sosial digital memfasilitasi identifikasi komunitas melalui Multi-View Clustering, analisis sentralitas untuk deteksi influencer, dan pemahaman pola penyebaran informasi viral. Implementasi pada sistem transportasi digital mendemonstrasikan optimalisasi perencanaan rute menggunakan algoritma Dijkstra dan Bellman-Ford, analisis kerentanan melalui identifikasi articulation point dan bridge, serta deteksi bottleneck dengan betweenness centrality. Penelitian menyimpulkan bahwa integrasi teori graf dalam pembelajaran matematika diskrit meningkatkan keterampilan berpikir kritis dan pemahaman aplikasi real-world, dengan rekomendasi pengembangan algoritma untuk graf dinamis masif dan integrasi machine learning dalam optimalisasi algoritma graf.

Kata kunci: Algoritma Deteksi Siklus; Jaringan Sosial Digital; Matematika Diskrit; Sistem Transportasi; Teori Graf.

1. LATAR BELAKANG

Teori graf (*graph theory*) merupakan cabang fundamental dalam matematika diskrit yang telah mengalami perkembangan signifikan dalam dua dekade terakhir, khususnya dalam konteks aplikasinya terhadap sistem jaringan kompleks modern. Sebagai kerangka matematis yang memodelkan struktur relasional melalui representasi simpul (*vertices*) dan sisi (*edges*), teori graf menyediakan landasan analitis untuk memahami dinamika interkoneksi dalam berbagai domain aplikatif (Majeed & Rauf, 2020). Penelitian terkini menunjukkan bahwa integrasi teori graf dengan pendekatan komputasional telah membuka dimensi baru dalam analisis jaringan sosial dan sistem transportasi digital, di mana kompleksitas struktural memerlukan metode deteksi siklus yang efisien dan akurat.

Temuan empiris dalam beberapa tahun terakhir mengindikasikan bahwa algoritma deteksi siklus memainkan peranan krusial dalam mengidentifikasi pola struktural pada jaringan kompleks. Algoritma *Depth-First Search* (DFS) dan pendekatan berbasis *Union-Find* telah terbukti efektif dalam mendeteksi siklus pada graf terarah maupun tidak terarah, dengan aplikasi yang meluas dari deteksi *deadlock* pada sistem konkuren hingga identifikasi pola komunikasi melingkar dalam jaringan sosial. Dalam konteks jaringan sosial digital, analisis graf memungkinkan identifikasi komunitas, pengukuran sentralitas simpul, dan pemahaman dinamika penyebaran informasi melalui platform media sosial seperti Facebook, Twitter, dan LinkedIn (Goldenberg, 2021). Metrik sentralitas seperti *degree centrality*, *betweenness centrality*, dan *closeness centrality* telah menjadi instrumen penting dalam menganalisis pengaruh individu dan struktur relasional dalam ekosistem digital.

Ucer et al. (2022) dalam penelitiannya yang dipublikasikan di *Scientific Reports* mendemonstrasikan bahwa teknik analisis jaringan sosial berbasis teori graf dapat ditransformasikan menjadi model klasifikasi visual yang mampu mengidentifikasi pola kompleks dalam data tabular dengan tingkat akurasi yang kompetitif dibandingkan metode *machine learning* konvensional. Penelitian tersebut mengungkapkan bahwa representasi graf memfasilitasi interpretabilitas model melalui visualisasi dua dimensi, yang memungkinkan pemahaman mendalam terhadap struktur data dan proses klasifikasi. Pendekatan ini membuka peluang baru dalam pengembangan sistem analitik yang tidak hanya akurat secara komputasional, tetapi juga transparan dan dapat dijelaskan kepada pengguna non-teknis.

Perkembangan sistem transportasi digital kontemporer juga menunjukkan relevansi tinggi penerapan teori graf dalam optimalisasi rute dan perencanaan jaringan. Guze (2019) dalam publikasinya di jurnal *Algorithms* mengeksplorasi konsep kerentanan (*vulnerability*) jaringan transportasi menggunakan parameter dominasi dalam teori graf, yang mencakup

domination number, *edge-domination*, serta *bondage-connected number*. Penelitian ini memberikan kontribusi substansial terhadap identifikasi *bottleneck* infrastruktur dan evaluasi ketahanan jaringan terhadap gangguan. Aplikasi algoritma pencarian jalur terpendek, analisis aliran jaringan (*network flow*), dan optimalisasi topologi telah mendemonstrasikan efisiensi operasional yang signifikan dalam sistem transportasi urban. Integrasi teori graf dengan teknologi *machine learning* dan algoritma metaheuristik telah membuka peluang untuk pengembangan sistem transportasi yang lebih adaptif dan responsif terhadap dinamika lalu lintas *real-time* (Karoński et al., 2020; Zhan et al., 2021).

Penelitian oleh Gao et al. (2022) yang dipublikasikan dalam *European Journal of Combinatorics* menganalisis siklus Hamilton dalam proses graf semi-acak (*semi-random graph process*), yang relevan untuk pemahaman struktur jaringan transportasi kompleks. Studi ini menggunakan strategi adaptif penuh untuk mengidentifikasi siklus Hamilton, yang memiliki aplikasi langsung dalam perencanaan rute optimal pada sistem transportasi multi-modal. Temuan empiris menunjukkan bahwa deteksi siklus dalam graf dapat dioptimalkan melalui pendekatan probabilistik yang mempertimbangkan dinamika jaringan yang terus berubah.

Meskipun literatur eksisting telah mengeksplorasi berbagai aspek teori graf secara terpisah, terdapat kesenjangan (*gap*) penelitian yang signifikan dalam hal integrasi sistematis antara konsep fundamental matematika diskrit, algoritma deteksi siklus, dan aplikasi kontemporer pada jaringan sosial serta sistem transportasi digital. Kajian terdahulu cenderung fokus pada aspek algoritmik atau aplikatif secara parsial, tanpa menyajikan sintesis komprehensif yang menghubungkan landasan teoretis dengan implementasi praktis dalam konteks teknologi informasi modern. Keterbatasan ini menciptakan kebutuhan akan kajian literatur yang terintegrasi, yang mampu menjembatani teori matematika diskrit klasik dengan tantangan komputasional kontemporer dalam menganalisis jaringan kompleks berskala besar.

Novelty penelitian ini terletak pada pendekatan holistik dalam menganalisis teori graf melalui tiga dimensi terintegrasi: (1) eksplorasi mendalam konsep fundamental teori graf dalam kerangka matematika diskrit, (2) kajian komprehensif algoritma deteksi siklus dengan analisis kompleksitas komputasional, dan (3) investigasi aplikasi terkini pada jaringan sosial digital dan sistem transportasi yang memanfaatkan teknologi *Internet of Things* (IoT) dan *big data analytics*. Studi ini menghadirkan perspektif baru dengan menyintesis literatur dari berbagai disiplin matematika murni, ilmu komputer, dan rekayasa sistem—untuk menghasilkan pemahaman yang lebih koheren tentang peran teori graf dalam mengatasi tantangan analisis jaringan kompleks di era digital. Berbeda dengan penelitian sebelumnya

yang bersifat segmental, studi pustaka ini menawarkan kerangka terintegrasi yang menghubungkan fondasi matematis dengan implementasi algoritmik dan aplikasi praktis dalam domain jaringan sosial serta transportasi digital.

Berdasarkan latar belakang yang telah diuraikan, penelitian ini merumuskan beberapa permasalahan fundamental yang akan dikaji secara sistematis: (1) Bagaimana konsep fundamental teori graf dalam perspektif matematika diskrit dapat dijelaskan secara komprehensif sebagai landasan teoretis untuk analisis jaringan kompleks?, (2) Bagaimana karakteristik dan kompleksitas komputasional algoritma deteksi siklus pada graf terarah dan tidak terarah, serta bagaimana efektivitasnya dalam berbagai konteks aplikasi?, (3) Bagaimana penerapan teori graf dan algoritma deteksi siklus dalam menganalisis struktur dan dinamika jaringan sosial digital, khususnya dalam identifikasi komunitas, analisis sentralitas, dan pola penyebaran informasi?, (4) Bagaimana implementasi teori graf dalam optimalisasi sistem transportasi digital, termasuk perencanaan rute, analisis kerentanan jaringan, dan identifikasi *bottleneck* infrastruktur?

Sesuai dengan rumusan masalah yang telah ditetapkan, penelitian ini bertujuan untuk: (1) Menganalisis dan menjelaskan secara mendalam konsep fundamental teori graf dalam kerangka matematika diskrit, mencakup definisi, teorema, dan properti struktural graf yang menjadi basis analisis jaringan kompleks, (2) Mengkaji secara komprehensif karakteristik algoritma deteksi siklus, termasuk analisis kompleksitas waktu dan ruang, serta membandingkan efektivitas berbagai pendekatan algoritmik dalam mendeteksi siklus pada berbagai jenis graf, (3) Meninvestigasi penerapan teori graf dalam analisis jaringan sosial digital, dengan fokus pada metode identifikasi komunitas, pengukuran metrik sentralitas, dan pemodelan dinamika penyebaran informasi menggunakan pendekatan berbasis graf., (4) Mengeksplorasi implementasi teori graf dalam optimalisasi sistem transportasi digital, mencakup algoritma pencarian jalur terpendek, analisis kerentanan jaringan, dan strategi mitigasi *bottleneck* untuk meningkatkan efisiensi dan ketahanan infrastruktur transportasi.

Penelitian studi pustaka ini diharapkan memberikan kontribusi signifikan baik secara teoretis maupun praktis: Penelitian ini berkontribusi dalam memperkaya khazanah keilmuan matematika diskrit dengan menyajikan sintesis komprehensif antara teori graf fundamental dan aplikasi algoritmik kontemporer. Kajian mendalam terhadap algoritma deteksi siklus dan properti struktural graf dapat menjadi referensi akademis bagi pengembangan teori graf lanjutan dan penelitian interdisipliner yang menghubungkan matematika diskrit dengan ilmu komputer dan rekayasa sistem. Secara praktis, penelitian ini menyediakan kerangka analitis yang dapat digunakan oleh praktisi dalam domain jaringan sosial dan sistem transportasi

digital. Pemahaman mendalam tentang penerapan teori graf dalam analisis jaringan sosial dapat membantu pengembang platform media sosial dalam merancang algoritma rekomendasi yang lebih efektif, deteksi komunitas yang lebih akurat, dan sistem analitik untuk memahami pola interaksi pengguna. Dalam konteks transportasi digital, hasil kajian ini dapat dimanfaatkan untuk pengembangan sistem navigasi cerdas, optimalisasi rute logistik, perencanaan infrastruktur transportasi yang lebih resilient, serta strategi mitigasi kemacetan berbasis analisis jaringan. Selain itu, penelitian ini dapat menjadi acuan bagi peneliti dan praktisi dalam memilih pendekatan algoritmik yang sesuai dengan karakteristik masalah spesifik yang dihadapi dalam analisis jaringan kompleks.

2. LANDASAN TEORITIS

Teori Dasar Graf dan Struktur Matematisnya

Graf secara formal didefinisikan sebagai pasangan terurut $G = (V, E)$ yang terdiri dari himpunan tak kosong V sebagai *vertex* atau simpul dan himpunan E sebagai *edge* atau sisi yang menghubungkan pasangan simpul dalam struktur tersebut (Rosen, 2019). Elemen fundamental graf mencakup konsep derajat simpul yang merepresentasikan jumlah sisi yang terkait dengan simpul tertentu, ordo graf yang menunjukkan kardinalitas himpunan simpul, dan ukuran graf yang mengindikasikan banyaknya sisi dalam struktur graf. Klasifikasi graf berdasarkan orientasi sisi membedakan *directed graph* atau graf berarah yang memiliki orientasi arah pada setiap sisinya dengan *undirected graph* atau graf tak berarah yang tidak memiliki orientasi spesifik (Munir, 2022). Graf sederhana atau *simple graph* didefinisikan sebagai struktur yang tidak mengandung *loop* maupun *multiple edges*, sedangkan *multigraph* merupakan struktur yang memperbolehkan keberadaan sisi ganda antara dua simpul yang sama. Konsep konektivitas graf menjelaskan bahwa graf terhubung merupakan struktur dimana terdapat lintasan antara setiap pasangan simpul, sementara graf tidak terhubung terdiri dari dua atau lebih komponen yang terpisah tanpa jalur penghubung antar komponen (Akhsani & Jaelani, 2020). Teori representasi graf mencakup matriks ketetanggaan atau *adjacency matrix* yang merupakan matriks persegi berukuran $n \times n$ dimana elemen pada baris i dan kolom j bernilai satu jika terdapat sisi antara simpul i dan j , serta matriks insidensi atau *incidence matrix* yang merepresentasikan relasi antara simpul dan sisi dalam bentuk matriks berukuran $n \times m$.

Teori Siklus dan Algoritma Deteksinya

Siklus atau *cycle* dalam teori graf didefinisikan sebagai jalur tertutup yang dimulai dan berakhir pada simpul yang sama tanpa pengulangan sisi, dengan panjang siklus minimal tiga untuk graf tak berarah dan minimal dua untuk graf berarah (Cormen et al., 2022). Teorema

fundamental menyatakan bahwa graf berarah adalah asiklik atau *acyclic* jika dan hanya jika penelusuran *Depth-First Search* tidak menemukan *back edge* dalam struktur graf tersebut. Konsep *back edge* merujuk pada sisi yang menghubungkan simpul ke salah satu pendahulunya dalam pohon DFS, yang menjadi indikator matematis keberadaan siklus dalam struktur graf berarah. Teori *Union-Find* atau struktur data *Disjoint Set* didasarkan pada partisi himpunan simpul menjadi subset-subset yang saling lepas, dimana dua simpul berada dalam subset yang sama jika memiliki representatif atau *root* yang identik (Goodrich & Tamassia, 2021). Operasi fundamental dalam struktur *Disjoint Set* meliputi *Find(x)* yang mengembalikan representatif dari subset yang memuat elemen x dengan kompleksitas $O(\alpha(n))$ menggunakan *path compression*, dan *Union(x,y)* yang menggabungkan dua subset menjadi satu subset dengan kompleksitas yang sama. Teorema siklus untuk graf tak berarah menyatakan bahwa penambahan sisi (u,v) ke dalam graf akan membentuk siklus jika dan hanya jika u dan v telah berada dalam komponen terhubung yang sama sebelum penambahan sisi tersebut. Algoritma deteksi siklus berbasis DFS memiliki kompleksitas waktu $\Theta(V + E)$ dan kompleksitas ruang $\Theta(V)$ untuk menyimpan status kunjungan setiap simpul dalam struktur rekursi (Mutianingsih et al., 2025).

Teori Jaringan dan Analisis Strukturalnya

Teori jaringan atau *network theory* merupakan cabang teori graf yang mengkaji properti struktural dan dinamis dari sistem relasional kompleks yang direpresentasikan sebagai graf dengan karakteristik spesifik. Konsep sentralitas atau *centrality* dalam teori jaringan mencakup beberapa metrik fundamental, dimana *degree centrality* untuk simpul v didefinisikan sebagai $CD(v) = \text{deg}(v)/(n-1)$ yang mengukur proporsi koneksi langsung simpul terhadap jumlah maksimal koneksi yang mungkin. *Betweenness centrality* dirumuskan sebagai $CB(v) = \sum(\sigma_{st}(v)/\sigma_{st})$ untuk semua pasangan simpul $s \neq v \neq t$, dimana σ_{st} merepresentasikan jumlah jalur terpendek dari s ke t dan $\sigma_{st}(v)$ adalah jumlah jalur terpendek tersebut yang melewati simpul v , mengukur seberapa sering simpul menjadi jembatan dalam jalur terpendek antar simpul lain (Wibowo & Kusuma, 2022). *Closeness centrality* didefinisikan sebagai $CC(v) = (n-1)/\sum d(v,u)$ untuk semua $u \neq v$ dimana $d(v,u)$ adalah jarak terpendek antara v dan u , mengukur kedekatan rata-rata simpul terhadap seluruh simpul lain dalam jaringan. Teori deteksi komunitas atau *community detection* didasarkan pada konsep modularitas yang didefinisikan sebagai $Q = (1/2m)\sum[A_{ij} - (k_i k_j/2m)]\delta(c_i, c_j)$, dimana m adalah jumlah sisi, A_{ij} adalah elemen matriks ketetanggaan, k_i adalah derajat simpul i , dan $\delta(c_i, c_j)$ bernilai satu jika simpul i dan j berada dalam komunitas yang sama. *Clustering coefficient* untuk simpul v didefinisikan sebagai $C(v) = 2e/(k(k-1))$ dimana e adalah jumlah sisi antara tetangga simpul v dan k adalah derajat simpul

v , mengukur tingkat keterklasteran lokal dalam struktur jaringan. Teorema konektivitas menyatakan bahwa graf G dengan n simpul adalah k -terhubung simpul atau *k-vertex-connected* jika penghapusan kurang dari k simpul tidak memutuskan konektivitas graf (Pramartha et al., 2024).

Teori Jalur Optimal dan Kompleksitasnya

Teori jalur terpendek atau *shortest path theory* mengkaji permasalahan menemukan jalur dengan bobot minimal antara dua simpul dalam graf berbobot, yang secara formal didefinisikan sebagai menemukan jalur $P = (v_0, v_1, \dots, v_k)$ dari simpul sumber s ke simpul tujuan t yang meminimalkan $w(P) = \sum w(v_i, v_{i+1})$ untuk i dari nol hingga $k-1$ (Cormen et al., 2022). Algoritma Dijkstra didasarkan pada prinsip *greedy* dengan properti relaksasi yang menyatakan bahwa untuk setiap simpul v , jarak terpendek $d[v]$ dari sumber s memenuhi $d[v] \geq \delta(s, v)$ dimana $\delta(s, v)$ adalah jarak terpendek sebenarnya, dan algoritma secara iteratif memperbarui $d[v]$ hingga mencapai nilai optimal dengan kompleksitas $O((V+E)\log V)$ menggunakan *binary heap*. Algoritma Bellman-Ford menerapkan prinsip pemrograman dinamis dengan relaksasi berulang pada seluruh sisi sebanyak $V-1$ iterasi, didasarkan pada teorema bahwa jalur terpendek sederhana antara dua simpul memiliki paling banyak $V-1$ sisi, dengan kemampuan mendeteksi siklus berbobot negatif melalui iterasi tambahan dengan kompleksitas $\Theta(VE)$ (Goodrich & Tamassia, 2021). Konsep *articulation point* atau simpul pemutus didefinisikan sebagai simpul yang apabila dihapus beserta sisi-sisi terkaitnya akan meningkatkan jumlah komponen terhubung dalam graf, yang dapat diidentifikasi menggunakan algoritma DFS dengan mencatat *discovery time* dan *low value* setiap simpul. Teorema *bridge* menyatakan bahwa sisi (u, v) adalah jembatan jika dan hanya jika tidak terdapat dalam siklus manapun, dan dapat dideteksi ketika $low[v] > disc[u]$ dalam penelusuran DFS. Teori *flow network* mendefinisikan jaringan aliran sebagai graf berarah $G = (V, E)$ dengan fungsi kapasitas $c: E \rightarrow \mathbb{R}^+$ dan dua simpul khusus yaitu sumber s dan tujuan t , dimana aliran f harus memenuhi batasan kapasitas $f(u, v) \leq c(u, v)$ dan konservasi aliran $\sum f(u, v) = \sum f(v, w)$ untuk setiap simpul v selain s dan t (Rosen, 2019).

3. METODE PENELITIAN

Penelitian ini menggunakan pendekatan kualitatif dengan metode studi kepustakaan (*library research*) yang berfokus pada eksplorasi mendalam terhadap literatur ilmiah yang relevan dengan teori graf, algoritma deteksi siklus, dan aplikasinya pada jaringan sosial serta sistem transportasi digital. Pendekatan studi kepustakaan dipilih karena memungkinkan peneliti untuk melakukan sintesis komprehensif terhadap berbagai perspektif teoretis dan

temuan empiris yang telah dipublikasikan, sehingga menghasilkan pemahaman yang lebih koheren dan terintegrasi mengenai fenomena yang dikaji (Snyder, 2019). Metode ini berbeda dengan *Systematic Literature Review* (SLR) yang bersifat lebih rigid dan terstruktur, di mana studi kepustakaan memberikan fleksibilitas lebih besar dalam eksplorasi konseptual dan analisis interpretatif terhadap literatur yang dikumpulkan

Sumber data penelitian berasal dari publikasi ilmiah primer berupa artikel jurnal nasional dan internasional bereputasi yang diterbitkan dalam rentang waktu 2020 hingga 2025. Kriteria inklusi mencakup artikel yang membahas teori graf dalam konteks matematika diskrit, algoritma deteksi siklus, aplikasi pada jaringan sosial digital, dan sistem transportasi. Penelusuran literatur dilakukan melalui basis data akademik terakreditasi seperti *Scopus*, *Web of Science*, *IEEE Xplore*, *ScienceDirect*, *SpringerLink*, dan *Google Scholar*. Kata kunci yang digunakan meliputi "*graph theory*", "*discrete mathematics*", "*cycle detection algorithm*", "*social network analysis*", "*transportation network*", "*network optimization*", dan kombinasi dari kata kunci tersebut. Proses seleksi literatur dilakukan secara bertahap dengan membaca *abstract* dan *full-text* untuk memastikan relevansi dengan tujuan penelitian.

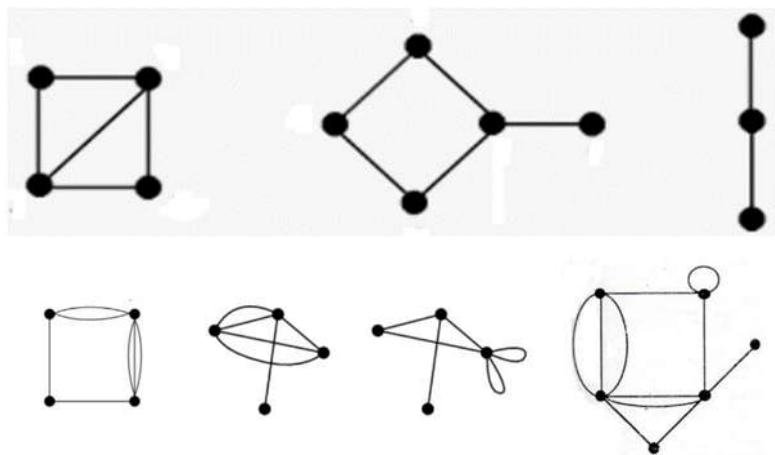
Teknik analisis data menggunakan pendekatan analisis tematik (*thematic analysis*) yang memungkinkan identifikasi, pengorganisasian, dan interpretasi pola-pola makna yang muncul dari literatur yang dikaji (Kalpokas & Radivojevic, 2021). Proses analisis dimulai dengan pembacaan mendalam (*close reading*) terhadap setiap artikel untuk memahami konteks, argumen utama, dan kontribusi teoretis maupun empiris yang ditawarkan. Selanjutnya, dilakukan *coding* atau pengkodean untuk mengidentifikasi tema-tema kunci yang berkaitan dengan konsep fundamental teori graf, karakteristik algoritma deteksi siklus, dan penerapannya dalam domain aplikatif. Tahap sintesis dilakukan dengan mengintegrasikan temuan-temuan dari berbagai sumber untuk membangun kerangka pemahaman yang komprehensif dan menjawab rumusan masalah penelitian. Validitas penelitian dijaga melalui triangulasi sumber, yaitu dengan membandingkan informasi dari berbagai publikasi untuk memastikan konsistensi dan kredibilitas interpretasi yang dihasilkan.

4. HASIL DAN PEMBAHASAN

Konsep Fundamental Teori Graf sebagai Landasan Teoretis Analisis Jaringan Kompleks

Teori graf merupakan cabang matematika diskrit yang mengkaji karakteristik dan properti struktur relasional antara objek-objek diskret melalui representasi visual dan matematis. Sebagai bagian integral dari keluarga besar matematika diskrit, teori graf memiliki peranan fundamental dalam kemajuan teknologi kontemporer meskipun baru ditemukan pada

abad kedelapan belas, yang diawali melalui penyelesaian masalah Tujuh Jembatan Königsberg oleh Leonhard Euler pada rentang tahun 1707 hingga 1783. Model yang dikembangkan Euler kemudian dikenal sebagai fondasi teori graf modern yang aplikatif dalam berbagai domain keilmuan. Secara formal, graf G didefinisikan sebagai pasangan terurut $G = (V, E)$ yang terdiri dari V sebagai himpunan tak kosong yang memuat simpul atau *vertex* dan E sebagai himpunan yang boleh kosong memuat sisi atau *edge*. Setiap sisi menghubungkan satu simpul ke simpul lainnya yang dapat berupa simpul identik, dimana simpul tersebut menjadi simpul ujung atau *endpoint* dari sisi yang bersangkutan. Ordo dan ukuran graf secara berturut-turut menunjukkan jumlah simpul dan sisi pada struktur graf, sedangkan kardinalitas graf ditentukan melalui ordo atau banyaknya simpul yang terkandung dalam graf tersebut.



Gambar 1. (a) Graf Sederhana dan (b) Graf Tak-Sederhana.

Berdasarkan karakteristik orientasi arah pada sisi, graf dibedakan menjadi graf tak berarah atau *undirected graph* yang sisinya tidak memiliki orientasi arah spesifik, dan graf berarah atau *directed graph* yang setiap sisinya diberikan orientasi arah tertentu. Graf terhubung merupakan struktur dimana setiap simpul dapat dijangkau dari simpul lainnya melalui serangkaian sisi, sedangkan graf tidak terhubung terdiri dari dua bagian atau lebih yang tidak memiliki koneksi satu sama lain. Klasifikasi graf siklik dan asiklik membedakan struktur yang memiliki setidaknya satu sirkuit atau lintasan tertutup dengan struktur yang tidak mengandung sirkuit tertutup sama sekali. Graf berbobot memiliki nilai atau bobot terkait dengan setiap sisi yang menunjukkan biaya, jarak, atau nilai lainnya, berbeda dengan graf tidak berbobot yang tidak memiliki nilai terkait dengan sisinya.

Berdasarkan keberadaan gelang atau sisi ganda pada suatu graf, struktur graf digolongkan menjadi graf sederhana atau *simple graph* yang tidak mengandung gelang maupun sisi ganda, dan graf tak sederhana atau *unsimple graph* yang mengandung sisi ganda atau gelang. Graf tak sederhana selanjutnya dibedakan menjadi graf ganda atau *multi-graph* yang mengandung sisi ganda dan graf semu atau *pseudo-graph* yang mengandung sisi gelang.

Penelitian (Siahaan et al., 2025) menunjukkan pentingnya kejelasan konseptual dalam penyampaian materi matematika diskrit, dimana analisis kesalahan berbahasa pada buku Matematika Diskrit menunjukkan bahwa kesalahan penggunaan huruf kapital, tanda baca, pemilihan kata, serta struktur kalimat dapat menghambat pemahaman konsep fundamental teori graf. Operasi dasar dalam teori graf mencakup penambahan simpul yang menambahkan *vertex* baru tanpa mengubah struktur eksisting, penghapusan simpul yang mengeliminasi simpul beserta seluruh sisi terhubungnya, penambahan sisi yang menghubungkan dua simpul tertentu, penghapusan sisi, pembentukan graf komplemen, ekstraksi subgraf, operasi union atau gabungan graf, operasi *intersection* atau irisan graf, perkalian kartesian graf, kontraksi sisi, dan penghapusan subgraf. Operasi-operasi fundamental ini menjadi landasan teoretis dalam analisis jaringan kompleks yang melibatkan struktur relasional berskala besar dengan karakteristik dinamis dan multidimensional.

Algoritma Deteksi Siklus: Karakteristik, Kompleksitas Komputasional, dan Efektivitas Aplikatif

Siklus atau *cycle* dalam teori graf didefinisikan sebagai jalur yang dimulai dan berakhir pada simpul identik tanpa mengulang sisi, dan umumnya tanpa mengulang simpul kecuali simpul awal atau akhir. Deteksi siklus merupakan permasalahan fundamental dalam analisis graf dengan implikasi signifikan terhadap validasi struktur data, optimalisasi algoritma, dan analisis ketergantungan sistem. Terdapat dua kategori utama graf yang mempengaruhi metodologi pendeteksian siklus, yaitu graf tak berarah dan graf berarah, dimana masing-masing memerlukan pendekatan algoritma yang berbeda sesuai dengan karakteristik strukturalnya. Algoritma *Depth-First Search* untuk graf tak berarah mengimplementasikan konsep penelusuran mendalam dimana ketika melakukan DFS, apabila ditemukan simpul yang telah dikunjungi dan bukan merupakan simpul induk atau *parent*, maka dapat disimpulkan terdapat siklus dalam struktur graf tersebut. Inti logika algoritma ini memeriksa setiap sisi (u, v) dimana jika v sudah dalam status *visited* dan v tidak sama dengan *parent* dari u , maka dapat dipastikan keberadaan siklus. Kelebihan pendekatan DFS untuk graf tak berarah terletak pada kemudahan implementasi dan kompleksitas komputasional $O(V + E)$ yang efisien untuk graf berukuran besar (Zaman et al., 2023).

Algoritma DFS dengan struktur *stack* rekursi atau *backtracking* untuk graf berarah memiliki mekanisme yang berbeda karena karakteristik arah pada setiap sisi. Dalam pendekatan ini, simpul dibedakan menjadi tiga status yaitu *WHITE* yang menandakan simpul belum dikunjungi, *GRAY* yang menunjukkan simpul sedang berada pada jalur DFS aktif dalam *stack* rekursi, dan *BLACK* yang mengindikasikan simpul telah selesai dikunjungi. Apabila

proses DFS menemukan sisi menuju simpul berstatus *GRAY*, maka sisi tersebut merupakan *back edge* yang mengindikasikan keberadaan siklus dalam struktur graf berarah. Logika pendeteksian dilakukan dengan menandai simpul u sebagai *GRAY* saat $DFS(u)$ dieksekusi, kemudian untuk setiap simpul v di tetangga simpul u , dilakukan pemeriksaan apakah v berstatus *GRAY* yang menandakan siklus atau *WHITE* yang memerlukan rekursi $DFS(v)$, dan setelah seluruh proses selesai simpul u ditandai sebagai *BLACK*. Kompleksitas algoritma ini tetap $O(V + E)$ dengan akurasi tinggi untuk graf berarah. Algoritma *Disjoint Set* atau *Union-Find* khusus diaplikasikan untuk graf tak berarah dengan konsep bahwa dua simpul berada dalam satu komponen terhubung apabila memiliki akar atau *root* yang identik. Jika suatu sisi menghubungkan dua simpul yang telah memiliki *root* sama, maka dapat dipastikan terbentuk siklus dalam struktur graf.

Tahapan algoritma melibatkan iterasi setiap sisi (u, v) dengan melakukan operasi $Find(u)$ dan $Find(v)$, dimana jika *root* kedua simpul identik maka siklus terdeteksi, namun jika berbeda maka dilakukan operasi $Union(u, v)$. Keunggulan algoritma *Union-Find* terletak pada kecepatan komputasi yang sangat tinggi dengan kompleksitas hampir $O(1)$ per operasi ketika menggunakan optimasi *path compression*, sehingga sangat sesuai untuk graf berukuran besar dan dinamis. Algoritma *Topological Sorting* merupakan pendekatan khusus untuk graf berarah yang memanfaatkan prinsip bahwa pengurutan topologi hanya dapat dibentuk untuk graf bebas siklus atau *Directed Acyclic Graph*. Jika proses *topological sort* tidak dapat mengunjungi seluruh simpul, maka dapat dipastikan terdapat siklus dalam struktur graf berarah tersebut.

Algoritma Johnson merepresentasikan pendekatan komprehensif yang tidak hanya mendeteksi keberadaan siklus tetapi juga mampu menemukan seluruh siklus elemental atau *simple cycles* dalam graf berarah. Pendekatan ini menggunakan kombinasi DFS dengan struktur *blocked* atau *unblocked set* untuk membangun kembali jalur secara efisien dengan kompleksitas $O((V + E) \times \text{jumlah siklus})$. Algoritma Tarjan untuk *Strongly Connected Components* atau SCC digunakan untuk menemukan komponen terhubung kuat dimana jika sebuah SCC memiliki lebih dari satu simpul, maka dapat dipastikan terdapat siklus, bahkan SCC berukuran satu simpul juga mengindikasikan siklus apabila memiliki *self-loop*. Penelitian (Mutianingsih et al., 2025) mengeksplorasi konstruksi bukti matematis mahasiswa dalam menyelesaikan soal graf Euler menggunakan perspektif Toulmin, menunjukkan bahwa pemahaman mendalam terhadap struktur graf dan kemampuan konstruksi bukti matematis sangat esensial dalam aplikasi algoritma deteksi siklus. Kompleksitas komputasional algoritma Tarjan yang mencapai $O(V + E)$ dengan kecepatan eksekusi tinggi menjadikannya sangat berguna untuk analisis graf besar dan kompleks dalam berbagai konteks aplikasi praktis.

Penerapan Teori Graf dalam Analisis Struktur dan Dinamika Jaringan Sosial Digital

Jaringan sosial digital merepresentasikan struktur relasional kompleks yang dapat dimodelkan secara efektif menggunakan teori graf, dimana pengguna direpresentasikan sebagai simpul atau *vertex* dan relasi pertemanan atau *follow* direpresentasikan sebagai sisi atau *edge*. Platform media sosial seperti Facebook, Instagram, dan Twitter mengimplementasikan struktur graf untuk berbagai analisis jaringan yang mencakup rekomendasi teman berdasarkan *common neighbors*, identifikasi *influencer* melalui analisis *centrality*, deteksi komunitas menggunakan algoritma *clustering*, serta analisis penyebaran hoaks dan informasi. Penelitian (Putri et al., 2024) menganalisis penggunaan teori graf dalam memahami jaringan komunikasi siswa saat pembelajaran matematika secara kolaboratif menggunakan Microsoft NodeXL sebagai instrumen analisis. Hasil penelitian menunjukkan bahwa teori graf memberikan visualisasi yang jelas tentang pola komunikasi siswa termasuk interaksi antar siswa dan pembentukan kelompok kecil, dimana pendekatan pembelajaran kolaboratif terbukti meningkatkan kemampuan komunikasi matematis siswa dalam diskusi kelompok. Aplikasi teori graf dalam konteks pembelajaran ini menunjukkan bahwa representasi visual struktur jaringan memfasilitasi pemahaman pola interaksi yang kompleks dan dinamis.

Identifikasi komunitas dalam jaringan sosial digital memanfaatkan algoritma *clustering* berbasis teori graf untuk mendeteksi kelompok pengguna dengan karakteristik interaksi yang intensif. Penelitian (Fang et al., 2024) mengembangkan pendekatan *Multi-View Clustering* melalui pembelajaran graf bipartit terpadu dan diskret atau *Unified and Discrete Bipartite Graph Learning*. Pendekatan ini mengintegrasikan pembelajaran subspace berbasis *anchor* untuk mempelajari graf bipartit spesifik dari berbagai perspektif, kemudian melakukan fusi graf bipartit untuk menghasilkan graf konsensus dengan pembelajaran bobot adaptif. Implementasi *Laplacian rank constraint* memastikan graf bipartit terfusi memiliki struktur kluster diskret dengan jumlah komponen terhubung spesifik, menghasilkan kompleksitas waktu linear terhadap ukuran data dengan efisiensi komputasional tinggi. Analisis sentralitas dalam jaringan sosial digital mengidentifikasi simpul-simpul dengan pengaruh signifikan menggunakan berbagai metrik seperti *degree centrality*, *betweenness centrality*, dan *closeness centrality*. Simpul dengan nilai sentralitas tinggi mengindikasikan pengguna yang memiliki pengaruh besar dalam penyebaran informasi dan pembentukan opini publik.

Pola penyebaran informasi dalam jaringan sosial digital dapat dianalisis menggunakan model graf yang memetakan alur transmisi konten dari pengguna satu ke pengguna lainnya. Algoritma deteksi siklus menjadi relevan dalam mengidentifikasi pola penyebaran informasi yang berulang atau *viral loops* dimana konten dikonsumsi dan dibagikan kembali dalam

struktur siklik yang memperkuat jangkauan distribusi. Penelitian (Andriani et al., 2025) melalui *Systematic Literature Review* menunjukkan bahwa pembelajaran teori graf efektif meningkatkan keterampilan berpikir kritis siswa melalui representasi visual, analisis sistematis, dan pemecahan masalah. Aktivitas berbasis teori graf seperti pewarnaan simpul dan analisis graf Eulerian mendorong pengembangan keterampilan analisis, evaluasi, dan kreativitas yang esensial dalam memahami dinamika jaringan sosial kompleks. Relevansi teori graf dengan aplikasi dunia nyata seperti analisis jejaring sosial memberikan nilai tambah dalam pembelajaran dan aplikasi praktis, dimana integrasi teori graf ke dalam kurikulum matematika diskrit menjadi langkah strategis dalam mendukung pembelajaran kontekstual dan relevan dengan kebutuhan abad kedua puluh satu.

Implementasi Teori Graf dalam Optimalisasi Sistem Transportasi Digital

Sistem transportasi digital memanfaatkan teori graf sebagai fondasi matematis untuk perencanaan rute, analisis kerentanan jaringan, dan identifikasi *bottleneck* infrastruktur transportasi. Dalam model graf transportasi, jalan direpresentasikan sebagai sisi atau *edge* sedangkan kota atau persimpangan direpresentasikan sebagai simpul atau *vertex*, sehingga memfasilitasi aplikasi berbagai algoritma pencarian jalur optimal seperti Dijkstra, Bellman-Ford, dan *Breadth-First Search*. Platform navigasi digital seperti Google Maps dan Waze mengimplementasikan algoritma graf untuk mengidentifikasi rute terpendek dengan mempertimbangkan berbagai parameter seperti jarak, waktu tempuh, kondisi lalu lintas real-time, dan biaya perjalanan. Penelitian (Maro & Djaha, 2022) menerapkan konsep himpunan dominasi pada graf untuk optimalisasi pembocoran pipa air minum di Kelurahan Kalabahi Barat, menunjukkan bahwa aplikasi teori graf dapat mereduksi total titik bocor dari dua ratus tujuh puluh enam titik yang mendominasi lima ratus tiga puluh enam rumah menjadi seratus tujuh puluh tujuh titik dengan cakupan dominasi identik. Pendekatan ini mendemonstrasikan efektivitas teori graf dalam mengoptimalkan distribusi infrastruktur dengan meminimalkan redundansi dan memaksimalkan efisiensi operasional.

Perencanaan rute dalam sistem transportasi digital melibatkan pemodelan jaringan jalan sebagai graf berbobot dimana bobot merepresentasikan jarak, waktu tempuh, atau biaya transportasi. Algoritma Dijkstra menjadi standar industri untuk pencarian jalur terpendek dalam graf dengan bobot non-negatif, menghasilkan solusi optimal dengan kompleksitas $O((V + E) \log V)$ menggunakan struktur data *priority queue*. Untuk graf dengan bobot negatif, algoritma Bellman-Ford menyediakan solusi dengan kompleksitas $O(VE)$ sambil mendeteksi keberadaan siklus negatif yang dapat mengindikasikan inkonsistensi dalam model jaringan. Sistem penjadwalan rute penerbangan dan kereta api memanfaatkan algoritma graf untuk

mengoptimalkan konektivitas antar lokasi dengan meminimalkan waktu transit dan memaksimalkan utilisasi armada transportasi. Penelitian (Sulistiyah et al., 2025) mengimplementasikan teori graf dalam pengenalan rangkaian listrik di kelas enam Madrasah Ibtidaiyah Hasyim Asy'ari Kota Malang, menunjukkan bahwa representasi rangkaian listrik menggunakan graf menyederhanakan pemahaman struktur koneksi komponen elektronika dan memfasilitasi analisis aliran arus listrik.

Analisis kerentanan jaringan transportasi menggunakan teori graf untuk mengidentifikasi simpul atau sisi kritis yang apabila mengalami gangguan dapat menyebabkan disrupsi signifikan terhadap konektivitas jaringan secara keseluruhan. Konsep *articulation point* atau simpul artikulasi mengidentifikasi simpul yang apabila dihapus akan meningkatkan jumlah komponen terhubung dalam graf, mengindikasikan kerentanan struktural pada lokasi tersebut. Konsep *bridge* atau jembatan mengidentifikasi sisi yang apabila dihapus akan memutuskan konektivitas antar komponen graf, mengindikasikan jalur kritis yang memerlukan prioritas pemeliharaan dan pengawasan. Algoritma deteksi siklus berperan penting dalam mengidentifikasi rute alternatif yang dapat berfungsi sebagai redundansi ketika jalur utama mengalami gangguan, sehingga meningkatkan resiliensi sistem transportasi terhadap berbagai skenario disrupsi. Penelitian (Awanis et al., 2023) memperkenalkan konsep teori graf di Madrasah Aliyah Manhalul Ma'arif Darek menunjukkan bahwa siswa usia sekolah menengah telah menggunakan graf sederhana sejak usia dini dalam konteks rantai makanan, jaringan listrik, dan penggambaran struktur molekul, namun tidak memahami ilmu sains di baliknya karena keterbatasan akses pembelajaran formal teori graf.

Identifikasi *bottleneck* infrastruktur transportasi memanfaatkan analisis *betweenness centrality* untuk mengidentifikasi simpul atau sisi yang dilalui oleh proporsi jalur terpendek tertinggi dalam jaringan transportasi. Simpul dengan nilai *betweenness centrality* tinggi mengindikasikan lokasi dengan volume lalu lintas intensif yang berpotensi menjadi titik kemacetan atau *bottleneck* ketika kapasitas infrastruktur tidak memadai. Penelitian (Indah & Farida, 2023) menganalisis efikasi diri mahasiswa pada perkuliahan matematika diskrit menunjukkan bahwa mahasiswa dengan efikasi diri tinggi dan sedang tidak mudah menyerah dalam menyelesaikan masalah matematika diskrit dan mampu belajar mandiri, sedangkan mahasiswa dengan efikasi diri rendah mudah menyerah dan memerlukan bimbingan dosen. Temuan ini menunjukkan pentingnya penguasaan konsep fundamental teori graf sebagai fondasi untuk aplikasi praktis dalam sistem transportasi digital. Penelitian (Pramartha et al., 2024) mengimplementasikan *E-Assessment Higher Order Thinking Skills* pada model *problem posing* dalam mata kuliah matematika diskrit menunjukkan efektivitas signifikan dengan nilai

n-gain sebesar nol koma tujuh puluh tiga dan hasil *paired sample t-test* menunjukkan nilai *t-hitung* sebesar sepuluh koma lima ratus tujuh belas, mengindikasikan bahwa pendekatan pembelajaran berbasis masalah meningkatkan pemahaman mahasiswa terhadap aplikasi teori graf dalam konteks real-world seperti optimalisasi sistem transportasi digital.

5. KESIMPULAN DAN SARAN

Teori graf sebagai cabang matematika diskrit terbukti memiliki peranan fundamental dalam analisis jaringan kompleks kontemporer. Konsep dasar yang mencakup simpul, sisi, dan berbagai klasifikasi graf menjadi landasan teoretis untuk pemodelan struktur relasional berskala besar. Algoritma deteksi siklus seperti Depth-First Search, Union-Find, Topological Sorting, algoritma Johnson, dan Tarjan untuk Strongly Connected Components menunjukkan efektivitas dengan kompleksitas komputasional $O(V + E)$ yang efisien untuk analisis graf berukuran besar. Penerapan teori graf dalam jaringan sosial digital memfasilitasi rekomendasi teman, identifikasi influencer melalui analisis sentralitas, deteksi komunitas menggunakan Multi-View Clustering, serta analisis penyebaran informasi viral. Implementasi pada sistem transportasi digital mendemonstrasikan keunggulan teori graf dalam optimalisasi perencanaan rute menggunakan algoritma Dijkstra dan Bellman-Ford, analisis kerentanan jaringan melalui identifikasi articulation point dan bridge, serta deteksi bottleneck infrastruktur dengan betweenness centrality. Integrasi teori graf dalam pembelajaran matematika diskrit terbukti meningkatkan keterampilan berpikir kritis, kemampuan pemecahan masalah, dan pemahaman aplikasi real-world yang relevan dengan kebutuhan abad kedua puluh satu. Penelitian lanjutan perlu mengeksplorasi pengembangan algoritma deteksi siklus yang lebih efisien untuk graf dinamis berukuran masif dengan kompleksitas komputasional sublinear. Implementasi machine learning dalam optimalisasi algoritma graf dapat meningkatkan akurasi prediksi pola jaringan kompleks pada domain aplikasi spesifik. Integrasi teori graf ke dalam kurikulum matematika diskrit di berbagai jenjang pendidikan memerlukan pengembangan media pembelajaran interaktif berbasis visualisasi graf yang memfasilitasi pemahaman konseptual mendalam. Platform digital seperti Microsoft NodeXL dan Gephi dapat dimanfaatkan sebagai instrumen pembelajaran yang mengintegrasikan teori dengan praktik analisis jaringan nyata. Kolaborasi interdisipliner antara matematikawan, ilmuwan komputer, dan praktisi industri perlu ditingkatkan untuk mengidentifikasi domain aplikasi baru teori graf dalam menghadapi tantangan big data dan Internet of Things. Penelitian empiris tentang efektivitas berbagai pendekatan pembelajaran teori graf terhadap peningkatan kemampuan berpikir analitis dan

komputasional mahasiswa dapat memberikan evidence-based recommendation untuk desain kurikulum yang lebih optimal dan kontekstual dengan kebutuhan industri digital kontemporer.

DAFTAR REFERENSI

- Andriani, A., Damanik, N. G., Damanik, T., Kembaren, S. N. B., Hutagalung, C. F., Harahap, D. M., Manik, S. G., Silitonga, N. S. S., & Haris, D. (2025). Studi literatur: Pembelajaran teori graf sebagai alat untuk meningkatkan keterampilan berpikir kritis siswa. *Jurnal Riset HOTS Pendidikan Matematika*, 5(2), 670–680. <https://doi.org/10.51574/kognitif.v5i2.2381>
- Awanis, Z. Y., Aini, Q., Switrayni, N. W., Wardhana, I. G. A. W., & Asmarani, Y. (2023). Pengenalan konsep teori graf di Madrasah Aliyah Manhalul Ma'arif Darek, Lombok Tengah, Nusa Tenggara Barat. *Jurnal Pepadu*, 4(1), 95–102.
- Fang, S. G., Huang, D., Cai, X. S., Wang, C. D., He, C., & Tang, Y. (2024). Efficient multi-view clustering via unified and discrete bipartite graph learning. *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, 35(8), 11436–11447. <https://doi.org/10.1109/TNNLS.2023.3261460>
- Gao, P., Kamiński, B., MacRury, C., & Prałat, P. (2022). Hamilton cycles in the semi-random graph process. *European Journal of Combinatorics*, 99, 103423. <https://doi.org/10.1016/j.ejc.2021.103423>
- Goldenberg, D. (2021). Social network analysis: From graph theory to applications with Python. *Proceedings of the Israeli Python Conference (PyCon '19)*, 1–9. <https://doi.org/10.13140/RG.2.2.36809.77925>
- Guze, S. (2019). Graph theory approach to the vulnerability of transportation networks. *Algorithms*, 12(2), Article 270. <https://doi.org/10.3390/a12020270>
- Indah, R. P., & Farida, A. (2023). Efikasi diri mahasiswa pada perkuliahan matematika diskrit. *Jurnal Derivat: Jurnal Matematika dan Pendidikan Matematika*, 10(3), 169–179. <https://doi.org/10.31316/jderivat.v10i3.4744>
- Kalpokas, N., & Radivojevic, I. (2021). Adapting practices from qualitative research to tell a compelling story: A practical framework for conducting a literature review. *The Qualitative Report*, 26(5), 1546–1566. <https://doi.org/10.46743/2160-3715/2021.4749>
- Karoński, M., Overman, E., & Pittel, B. (2020). On a perfect matching in a random digraph with average out-degree below two. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, 143, 226–258. <https://doi.org/10.1016/j.jctb.2020.03.004>
- Majeed, A., & Rauf, I. (2020). Graph theory: A comprehensive survey about graph theory applications in computer science and social networks. *Inventions*, 5(1), Article 10. <https://doi.org/10.3390/inventions5010010>
- Maro, L., & Djaha, K. M. T. (2022). Penerapan himpunan dominasi pada graf untuk optimalisasi pembocoran pipa air minum di Kelurahan Kalabahi Barat. *Jurnal Kadikma (Matematika dan Pendidikan Matematika)*, 13(2). <https://doi.org/10.19184/kdma.v13i2.32374>

- Mutianingsih, N., Hadi, S., Prayitno, L. L., Sugandi, E., & Maftuh, M. S. (2025). Eksplorasi konstruksi bukti matematis mahasiswa menyelesaikan soal graf Euler: Perspektif Toulmin. *Jurnal Wahana Pendidikan*, 12(1), 41–52.
- Pramartha, I. N. B., Kusumawati, N. M. R., Dewi, N. P. T. T., Sudiarmika, I. P. G. A., & Jayanti, N. W. S. (2024). Implementasi e-assessment higher order thinking skills (HOTS) pada model problem posing pada mata kuliah matematika diskrit. *Jurnal Riset dan Inovasi Pembelajaran*, 4(3), 1925–1937. <https://doi.org/10.51574/jrip.v4i3.2060>
- Putri, T. N., Nasution, D. A., Sari, N., Soraya, H., Ramadhani, H. P., Tania, N. S., Wahidah, K., Sipahutar, I. Z., & Haris, D. (2024). Analisis teori graf pada jaringan komunikasi dengan model pembelajaran kolaboratif di kelas matematika menggunakan Microsoft NodeXL. *Jurnal Cendekia Ilmiah*, 4(1), 1771–1777.
- Siahaan, F. B., Harahap, L. M., Sinaga, L. L., Agustina, N., & Febriana, I. (2025). Analisis kesalahan berbahasa pada buku matematika diskrit berdasarkan Pedoman Umum Ejaan Bahasa Indonesia (PUEBI). *Morfologi: Jurnal Ilmu Pendidikan, Bahasa, Sastra dan Budaya*, 3(2), 169–179.
- Snyder, H. (2019). Literature review as a research methodology: An overview and guidelines. *Journal of Business Research*, 104, 333–339. <https://doi.org/10.1016/j.jbusres.2019.07.039>
- Sulistiyah, N., Rahayuningsih, S., & Prayitno, A. (2025). Implementasi teori graf dalam pengenalan rangkaian listrik di kelas VI MI Hasyim Asy'Ari Kota Malang. *Laplace: Jurnal Pendidikan Matematika*, 8(1), 70–81.
- Ucer, S., Ozyer, T., & Alhaji, R. (2022). Explainable artificial intelligence through graph theory by generalized social network analysis-based classifier. *Scientific Reports*, 12(1), Article 19419. <https://doi.org/10.1038/s41598-022-19419-7>
- Zaman, S., Ahmed, W., Sakeena, A., Rasool, K. B., & Ashebo, M. A. (2023). Mathematical modeling and topological graph description of dominating David derived networks based on edge partitions. *Scientific Reports*, 13(1), Article 42340. <https://doi.org/10.1038/s41598-023-42340-6>
- Zhan, Y., Han, R., Tse, M., Ali, M. H., & Hu, J. (2021). A social media analytic framework for improving operations and service management: A study of the retail pharmacy industry. *Technological Forecasting and Social Change*, 163, 120504. <https://doi.org/10.1016/j.techfore.2020.120504>