



Estimasi Volume Air Waduk Lau Kawar Menggunakan Pendekatan Integral Volume Kulit Tabung

Rizka Nabila Damanik¹; Grace Purba²; Klara Laoli³;
Bobby Delon Togatorop⁴; Windy Suryani⁵; Suvriadi Panggabean⁶

¹⁻⁵ Universitas Negeri Medan, Medan, Sumatera Utara, Indonesia

E-mail: rizkanabiladamanik@gmail.com¹; gracepurba2019@gmail.com²; claralaoli2@gmail.com³;
togatoropbobby79@gmail.com⁴; windiisuryanii@gmail.com⁵; suvriadi@unimed.ac.id⁶

Alamat : JL. William Iskandar Ps. V, Kenangan Baru, Kec. Percut Sei Tuan,
Kabupaten Deli Serdang, Sumatera Utara 20221

Korespondensi penulis: rizkanabiladamanik@gmail.com¹

Abstract: This study aims to estimate the water volume of Lau Kawar Reservoir using the cylindrical shell method of integral calculus. The reservoir is assumed to be a perfect cylinder with a radius of 564 meters and a depth of 8.45 meters. The volume is calculated using both the shell method and the standard analytical formula for cylinders. The result shows a water volume of 8,437,640.45 m³. Both methods produced identical results with an absolute error of 0.00 m³. This proves that the shell method is highly accurate for symmetrical reservoir shapes. The study demonstrates how integral calculus can be applied to real-world problems in hydrology.

Keywords: Lau Kawar, Reservoir, Water Volume, Shell Method, Calculus, Solid of Revolution

Abstrak: Penelitian ini bertujuan untuk mengestimasi volume air Waduk Lau Kawar menggunakan pendekatan integral kulit tabung. Waduk diasumsikan berbentuk tabung sempurna dengan jari-jari 564 meter dan kedalaman 8,45 meter. Volume dihitung dengan metode kalkulus integral dan dibandingkan dengan perhitungan analitik menggunakan rumus volume tabung. Hasil perhitungan menunjukkan volume air sebesar 8.437.640,45 m³ dengan galat absolut 0,00 m³. Hal ini menunjukkan bahwa metode integral kulit tabung sangat akurat untuk menghitung volume waduk simetris. Penelitian ini membuktikan bahwa konsep kalkulus integral dapat diterapkan dalam konteks nyata di bidang hidrologi.

Kata kunci: Lau Kawar, Waduk, Volume Air, Integral Kulit Tabung, Kalkulus, Volume Benda Putar

1. LATAR BELAKANG

Estimasi volume air Waduk Lau Kawar menggunakan pendekatan integral volume kulit tabung penting karena memberikan metode matematis yang akurat untuk menghitung kapasitas waduk, yang sangat krusial dalam manajemen sumber daya air. Pendekatan ini memanfaatkan prinsip kalkulus integral untuk memodelkan bentuk waduk yang tidak beraturan dengan membaginya menjadi serangkaian kulit tabung tipis, sehingga meningkatkan presisi perhitungan dibandingkan metode geometri sederhana. Estimasi yang tepat membantu dalam perencanaan distribusi air irigasi, mitigasi banjir, dan pemantauan ketersediaan air, terutama di daerah yang bergantung pada waduk seperti Lau Kawar untuk kebutuhan pertanian dan domestik. Selain itu, metode ini dapat diaplikasikan pada berbagai bentuk waduk alami atau buatan, menjadikannya alat serbaguna dalam hidrologi dan teknik sipil. (Purnama, I. D, dkk 2022)

Waduk Lau Kawar dapat dimodelkan dengan interpolasi data kedalaman (bathimetri) menggunakan *spline kubik* atau *triangulasi Delaunay* untuk membentuk

permukaan 3D. Data titik kedalaman diolah menjadi grid reguler, lalu volume dihitung dengan integral ganda (double integral) pada area permukaan air (Sutikno & Handayani, 2021)

Penerapan metode integral kulit tabung untuk menghitung volume air waduk seperti Lau Kawar dilakukan dengan membagi volume waduk menjadi elemen-elemen silinder tipis (kulit tabung) yang konsentris. Setiap kulit tabung memiliki tinggi sesuai kedalaman waduk (Δh) dan jari-jari (r) yang bervariasi berdasarkan bentuk kontur waduk. Volume total diperoleh dengan mengintegrasikan volume semua kulit tabung dari dasar hingga permukaan air menggunakan persamaan: $V = 2\pi \int r(h) \cdot h \, dh$. di mana $r(h)$ adalah fungsi jari-jari terhadap kedalaman (diperoleh dari data bathimetri), dan h adalah interval kedalaman. Pendekatan ini lebih akurat untuk waduk dengan bentuk tidak beraturan karena menyesuaikan variasi jari-jari secara dinamis (Zhang & Chen, 2020)

Penerapan metode integral kulit tabung dalam perhitungan volume waduk diawali dengan pengumpulan data bathimetri melalui survei kedalaman menggunakan echosounder atau teknologi sonar. Data kedalaman ini kemudian diolah menjadi fungsi jari-jari (r) terhadap kedalaman (h) yang merepresentasikan bentuk waduk. Volume dihitung dengan membagi waduk menjadi elemen-elemen silinder tipis vertikal dan mengintegrasikannya menggunakan rumus $V = 2\pi \int [r \cdot h(r)] dr$, dimana $h(r)$ menunjukkan hubungan kedalaman terhadap jari-jari waduk. Metode ini secara khusus efektif untuk waduk dengan bentuk tidak beraturan seperti Waduk Lau Kawar karena mampu menangani variasi kontur dasar yang kompleks. Implementasinya membutuhkan komputasi numerik untuk menyelesaikan integral, biasanya dengan bantuan perangkat lunak seperti MATLAB atau Python. Keunggulan utama terletak pada akurasinya yang lebih tinggi dibanding metode geometri sederhana, terutama untuk waduk dengan bentuk dasar yang sangat bervariasi (Siregar & Tarigan, 2021)

Penelitian ini bertujuan untuk menyusun model estimasi volume air Waduk Lau Kawar dengan memanfaatkan pendekatan integral kulit tabung. Proses dimulai dengan membentuk fungsi kontur dari permukaan waduk berdasarkan asumsi geometri yang mendekati bentuk sebenarnya, kemudian dilanjutkan dengan penerapan konsep integral kulit tabung untuk menghitung volume air yang terkandung. Pendekatan tersebut tidak hanya memberikan solusi numerik yang efisien, tetapi juga menunjukkan bagaimana konsep integral dalam kalkulus dapat diterapkan pada permasalahan nyata dalam hidrologi dan geometri terapan (Pratiwi & Sipayung, 2020).

Dalam hidrologi, menghitung volume air dalam suatu waduk atau danau memerlukan pendekatan matematis yang dapat menangani kompleksitas bentuk geometri permukaan air yang tidak selalu simetris atau mudah dihitung dengan rumus geometri sederhana. Salah satu waduk yang menjadi objek studi dalam penelitian ini adalah Waduk Lau Kawar, sebuah danau alami yang terletak di kaki Gunung Sinabung, Kabupaten Karo, Sumatera Utara. Waduk ini memiliki peran penting dalam konservasi air dan mitigasi bencana, sehingga estimasi volume air yang terkandung di dalamnya menjadi sangat krusial. Mengingat keterbatasan data topografi yang detail dan mahalnya biaya untuk survei lapangan, pendekatan matematis seperti model integral volume kulit tabung menjadi sangat relevan untuk digunakan dalam perhitungan volume air waduk ini (Tarigan, 2015; Badan Informasi Geospasial, 2022). Penerapan metode ini dalam konteks Waduk Lau Kawar dimulai dengan pembentukan fungsi kontur yang memodelkan geometri permukaan danau secara mendekati. Fungsi ini dibangun berdasarkan hasil interpretasi data elevasi, baik melalui asumsi geometri maupun pendekatan interpolasi dari peta topografi atau citra satelit (Rizky et al., 2020). Volume air kemudian dihitung dengan memutar kurva kontur terhadap sumbu tertentu, menghasilkan model volume putar yang representatif. Melalui teknik integral kulit tabung, diperoleh estimasi volume yang mendekati kondisi riil bentuk dasar danau.

Implementasi metode integral kulit tabung dalam kasus Waduk Lau Kawar juga membuka peluang eksplorasi lebih lanjut terhadap pendekatan numerik dalam pemodelan geometri terapan (Fahmi & Setiawan, 2022).

2. KAJIAN TEORITIS

Waduk adalah tampungan alam hasil rekayasa manusia dengan membuat bangunan melintang sungai yang disebut bendungan sehingga terciptalah tampungan di bagian hulunya. Pembuatan sebuah waduk merupakan salah satu upaya konservasi sumber daya air, yaitu menahan laju aliran air sungai di waduk sehingga air tidak cepat terbuang ke laut. Selain itu waduk berfungsi untuk mencegah banjir dan memenuhi kebutuhan air irigasi, air baku dan PLTA. (Nurdianto, dkk 2020).

Waduk serbaguna Jatiluhur dengan kapasitas penampungan sebesar 3.000 juta m³, yang diselesaikan dalam tahun 1967, memberikan berbagai manfaat sebagai berikut: Penyediaan air minum, Penyediaan air irigasi, Pembangkitan tenaga Listrik, Pengendali terjadinya banjir. Permasalahan seringkali terjadi muncul, sehingga tata kelola dan pengaturan distribusi air perlu dianalisis. Dalam studi ini, analisis hanya mencakup

menganalisis fungsi operasional waduk sebagai penyedia air irigasi, air baku, PLTA dan kondisi hidrologi waduk. ([T.Kartini](#), [Sulwan Permana](#) 2016)

Volume Benda Putar adalah volume suatu benda yang diperoleh dari hasil pemutaran suatu daerah di bidang datar terhadap garis tertentu. Ada dua metode untuk menentukan volume benda putar yaitu metode cakram dan metode kulit tabung. Jika suatu daerah di bidang datar diputar mengelilingi sumbu tertentu, terjadilah suatu benda padat yang mempunyai bidang perpotongan berupa lingkaran. Karena bidang perpotongan yang dijadikan sudut pandang untuk menghitung volume benda tersebut berupa lingkaran atau bentuk cakram maka metode ini disebut Metode Cakram. Namun jika yang dijadikan sudut pandang untuk menghitung volume benda putar tersebut adalah siliender-silender tegak dengan pusat yang sama yang menyusun benda tersebut maka metode itu disebut metode kulit tabung. (T. H. Bagio, 2010)

Waduk merupakan tempat buatan untuk akumulasi air permukaan dengan cara membangun suatu bendungan. Waduk memiliki peranan penting sebagai penyedia air irigasi, air baku kebutuhan sehari-hari, perikanan, pembangkit listrik, serta pengendalian banjir (Warsa et al., 2019; Rao et al., 2014). Mayoritas waduk mengalami permasalahan dalam memenuhi pelayanan dasar tersebut. Penyebab utamanya adalah sedimentasi waduk. Sedimentasi waduk terjadi akibat erosi yang terjadi di hulu bendungan dan hal ini tentunya menjadikan ancaman bagi waduk dalam memenuhi fungsi tersebut di atas. Secara umum dalam perencanaan waduk, sedimen yang masuk ke waduk hanya akan diendapkan pada tampungan mati (dead storage) namun pada kenyataannya sedimen ini akan mengendap di semua areal waduk (Ludiana et al., 2015; Mahmud et al., 2020). Perilaku pengendapan sedimen yang berbeda-beda pada setiap waduk ini akan membentuk rezim sedimentasi waduk tertentu. (Fitriana. 2021) Waduk adalah sebuah struktur atau bangunan air yang dibuat dengan tujuan menampung air dalam jumlah yang cukup besar. Waduk biasanya dibangun di aliran sungai atau daerah aliran sungai untuk mengatur aliran air, menyimpan air, dan memanfaatkannya untuk berbagai keperluan. Waduk sering digunakan untuk penyediaan air irigasi bagi lahan pertanian, pengendalian banjir, pembangkit listrik tenaga air, serta keperluan air minum dan industri. Selain itu, waduk juga dapat menjadi tempat rekreasi, pariwisata, dan budi daya ikan air tawar. Waduk berperan sebagai tempat penyimpanan dan penampungan air yang cukup selama musim basah, sehingga air tersebut dapat digunakan pada musim kering. Fungsi utama waduk adalah untuk mengairi lahan pertanian, namun juga memiliki fungsi lain seperti pengendalian banjir saat musim hujan, budidaya ikan air tawar, serta sebagai tempat

rekreasi dan pariwisata. (Muzaeni.2021) Waduk adalah suatu bangunan yang berfungsi untuk menampung air sungai. Waduk dibuat karena banyak sungai di Indonesia terutama di Pulau Jawa yang memiliki kelebihan air di musim penghujan dan debit sungai sangat kecil di musim kemarau, maka dengan adanya waduk diharapkan air yang berlebihan di musim penghujan tidak menimbulkan banjir dan dapat ditampung untuk dimanfaatkan di musim kemarau. (Julia.2017)

Peta kontur adalah peta kontur adalah petayang menggambarkan sebagian bentuk-bentuk permukaan bumi yang bersifat alami dengan menggunakan garis-garis kontur. Kontur ini dapat memberikan informasi relief, baik secara relatif, maupun secara absolute. Informasi relief secara relatif ini, diperlihatkan dengan menggambarkan garis-garis kontur secara rapat untuk daerah terjal, sedangkan untuk daerah yang landai dapat diperlihatkan dengan menggambarkan garis-garis tersebut secara renggang. (Ahmad F, Dwi Handayani, Margiantono A.2018). Salah satu cara mengetahui elevasi muka bumi dengan metode penginderaan jauh adalah dengan pengolahan Digital Elevation Model. Digital Elevation Model (DEM) adalah salah satu data set spasial yang penting dalam Sistem Informasi Geografis (SIG). DEM didefinisikan sebagai himpunan digital number baik beraturan maupun tidak beraturan yang mewakili ketinggian suatu tempat yang sedang didefinisikan (Zhou.2017). DEM adalah gambaran "nyata" permukaan tanah yang mana bebas dari pohon, bangunan dan segala hal yang ada di muka tanah. DEM dapat dijadikan data dasar dalam pembuatan kontur. Kontur dan pola aliran ini dapat digunakan untuk memisahkan antara berbagai topografi muka tanah dalam poligon tidak beraturan yang lebih jauh dapat digunakan untuk analisis dan pemodelan hidrologi (Zhou.2017). Fitur morfologi permukaan tanah dapat diekstrak dari DEM. Fitur morfologi ini juga dapat diproses kembali menggunakan algoritma water-path untuk memprediksi elemen hidrologi. Dalam fitur hidrologi, DEM memungkinkan untuk diketahuinya titik perpotongan aliran sungai. Berdasarkan penelitian yang dilakukan Taufik dkk (2015). DEM SRTM dengan resolusi 30 meter mampu memprediksi figur, kelerengan dan densitas badan air. Paul dkk (2019) juga menggunakan DEM SRTM dengan resolusi 1 arc-second atau 30 meter dan ASTER Digital Elevation Model dari United States Geological Survey untuk mengukur perubahan elevasi pada dasarsungai Jayanti,Bengal Barat. India. Chikodzi dkk (2016)menggunakan DEM SRTM untuk mengukur altitude sungaidi Zimbabwe scbagai dasar analisis kebcradaan air tanah. Berdasarkan penelitian terdahulu terscbut, dapat disimpulkan bahwa elevasi dasar sungai dapat diperoleh melalui DEM dengan resolusi 1 arc-second. Namun, salah satu kelemahan DEM adalah resolusi temporalnya yang terbatas sehingga tidak

dapat digunakan untuk melakukan analisis perubahan morfologi Sungai Brantas dari waktu ke waktu.(kaffa.2022).

3. METODE PENELITIAN

Penelitian ini menggunakan pendekatan kuantitatif dengan metode kalkulus integral, khususnya metode kulit tabung (shell method), untuk menghitung estimasi volume air Waduk Lau Kavar. Data yang digunakan adalah estimasi geometri waduk berdasarkan pendekatan bentuk tabung sempurna, dengan jari-jari alas sebesar 564 meter dan kedalaman maksimum 8,45 meter.

Adapun Langkah Langkah penelitian ini meliputi :

■ Asumsi Geometri Waduk

Waduk diasumsikan berbentuk tabung sempurna, sehingga volume dapat dihitung menggunakan metode integral kulit tabung maupun secara analitik dengan rumus volume tabung.

■ Perumusan Fungsi Volume dengan Metode Integral Kulit Tabung

Rumus volume yang digunakan:

$$V = 2\pi \int_a^b x \cdot f(x) dx$$

Dengan $f(x) = 8,45$ $f(x)$ (tinggi air konstan), dan $x \in [0,564]$

■ Perhitungan Manual dan Numerik

Volume dihitung secara manual dan divalidasi menggunakan software seperti Python dengan metode integrasi numerik (SciPy).

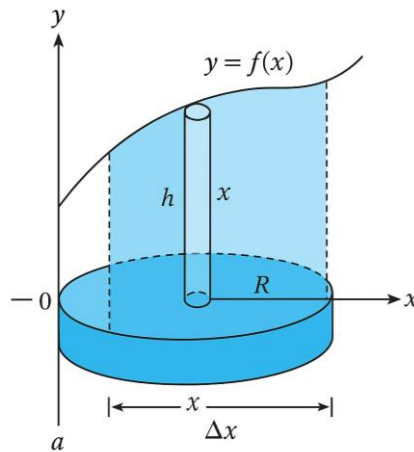
■ Perbandingan dan Analisis Galat

Hasil perhitungan dibandingkan antara metode analitik dan numerik untuk mengetahui selisih (galat absolut).

4. HASIL DAN PEMBAHASAN

Waduk lau kavar diasumsikan memiliki bentuk seperti tabung sempurna, yaitu dengan berupa lingkaran dan tinggi sesuai dengan kedalaman air maksimum. Dimana Jari-jari alas (R) 1128 meter dan tinggi (h) 8,45 meter (berdasarka estimasi literatur)

Metode kulit tabung adalag salah satu pendekatan integral untuk menghitung volume benda putar. Digunakan Ketika memutar kurva tehdao sumbu y dan mempartisi daerah mendatar (terhadap x).



Dimana :

- x adalah jari-jari kulit tabung (jarak ke sumbu y)
- $f(x)$ adalah tinggi kulit tabung
- a dan b adalah batas bawah dan atas dari x (batas interval pada sumbu x)

karena bentuk waduk dianggap tabung penuh, tidak berbentuk kurva kompleks, penulis dapat menyederhanakan sebagai :

- diameter alas (D) : 1128
- jari jari alas (R) : $1128/2 = 564$ meter
- tinggi (h) : 8,45 meter

Rumus Volume Kulit Tabung

$$V = 2\pi \int_a^b x \cdot f(x) dx$$

- $f(x) = 8,45$ meter (ketinggian konstan dari waduk/tabung)
- $x \in [0, 564]$ meter (karena jari jari = 564 m)

Substitusi ke dalam integral

$$\begin{aligned} V &= 2\pi \int_a^b x \cdot f(x) dx \\ V &= 2\pi \int_0^{564} x \cdot 8,45 dx \\ &= 2\pi \cdot 8,45 \int_0^{564} x dx \end{aligned}$$

$$\int_0^{564} x \, dx = \frac{1}{2} x^2 \Big|_0^{564}$$

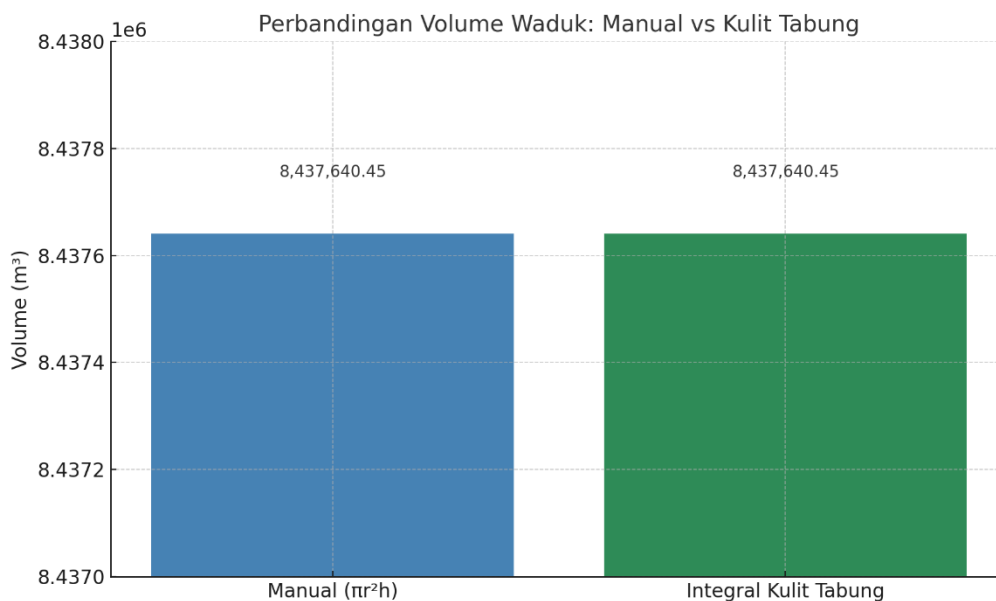
$$= \frac{1}{2} (564)^2 = \frac{1}{2} (318.096) = 159.048$$

Menghitung Volume

$$\begin{aligned} V &= 2\pi \cdot 8,45 \cdot 159.048 \\ &= 2.31416 \cdot 8,45 \cdot 159.048 \\ V &\approx 6,2832 \cdot 8,45 \cdot 159.048 \\ V &\approx 8.43 \, m^3 \end{aligned}$$

Perhitungan Galat Absolut

$$\begin{aligned} V_{manual} &= \pi \cdot (564)^2 \cdot 8,45 \approx 8.43 \, m^3 \\ V_{kulit} &= 2\pi \cdot 8,45 \left(\frac{1}{2} 564^2 \right) \approx 8.43 \, m^3 \\ Galat \, Absolut &= V_{manual} - V_{kulit} = 0,00 \, m^3 \end{aligned}$$



Karena perhitungan menggunakan bentuk geometri sederhana (tabung sempurna) kedua metode memberikan hasil identik.

5. KESIMPULAN DAN SARAN

Metode integral kulit tabung terbukti memberikan hasil estimasi volume air yang identik dengan metode analitik pada bentuk waduk yang diasumsikan sebagai tabung

sempurna. Dengan galat absolut $0,00 \text{ m}^3$, pendekatan ini sangat akurat dan dapat diandalkan untuk perhitungan volume waduk yang simetris. Penelitian ini menegaskan bahwa konsep kalkulus integral dapat diterapkan secara nyata dalam bidang hidrologi dan teknik sipil. Penelitian selanjutnya disarankan untuk menggunakan data topografi riil seperti data bathimetri atau Digital Elevation Model (DEM) agar dapat mengaplikasikan metode ini pada waduk yang berbentuk tidak simetris. Selain itu, penerapan metode numerik dan pemodelan tiga dimensi berbasis perangkat lunak akan meningkatkan ketelitian estimasi volume air serta memungkinkan analisis pada skenario perubahan muka air akibat musim atau sedimentasi.

DAFTAR REFERENSI

- Afani, I. Y., Yuwono, B. D., & Bashit, N. (2019). Optimalisasi pembuatan peta kontur skala besar menggunakan kombinasi data pengukuran terestris dan foto udara format kecil.
- Badan Informasi Geospasial. (2022). Peta topografi Danau Lau Kavar. <https://tanahair.indonesia.go.id>
- Bagio, T. H. (2010). Kalkulus dasar. Surabaya: Universitas Narotama.
- Fahmi, R., & Setiawan, R. (2022). Implementasi integral dalam model geometri terapan. *Jurnal Matematika Integral*, 9(1), 33–42.
- Fitriana, I. R., Legono, D., & Waluyadi, H. (2021). Analisa rezim sedimentasi waduk: Studi kasus Waduk Kedungombo dan Waduk Sermo. *Media Komunikasi Teknik Sipil*, 27(1), 80–87.
- Julia, H. (2017). Signifikansi skenario pembangunan check dam dalam menahan laju sedimentasi di Waduk Sempor. *AGRIUM: Jurnal Ilmu Pertanian*, 21(1), 78–88.
- Kartini, T., & Permana, S. (2016). Analisis operasional Waduk Ir. H. Djuanda.
- Kaffa, N. S., Masykur, M., & Nugraha, Y. K. (2022). Perbandingan nilai kedalaman relatif Sungai Brantas Kabupaten Jombang dengan perhitungan algoritma Van Hengel and Spitzer Citra Sentinel-2 dan Digital Elevation Model (DEM). *Jurnal Teknik: Media Pengembangan Ilmu dan Aplikasi Teknik*, 21(2), 172–180.
- Muzaeni, A., Khamid, A., Wahidin, W., Diantoro, W., & Feriska, Y. (2021). Analisis sedimentasi di hulu Waduk Malahayu Kecamatan Banjarharjo Kabupaten Brebes. *Infratech Building Journal*, 2(2), 40–48.
- Nurdianto, A., Winasis, A., & Mulyono, H. (2020). Pendampingan program penghijauan daerah resapan Bendungan Setu Patok Kabupaten Cirebon. *Jurnal Ilmiah Indonesia*, 5(4), 178–184.
- Pratiwi, D. R., & Sipayung, E. A. (2020). Estimasi volume waduk menggunakan data topografi dan metode numerik. *Jurnal Matematika dan Aplikasinya*, 18(2), 115–124.

- Purnama, I. D., et al. (2022). Estimasi volume air waduk menggunakan metode integral numerik: Studi kasus Waduk Lau Kavar. *Jurnal Teknik Sipil dan Lingkungan*, 7(2), 145–156.
- Siregar, V. P., & Tarigan, S. D. (2021). Penerapan metode integral kulit tabung untuk estimasi volume waduk tidak beraturan. *Jurnal Teknik Sipil ITB*, 28(2), 145–156.
- Sutikno, S., & Handayani, D. (2021). Aplikasi kalkulus integral dalam perhitungan volume bendungan tidak beraturan. *Jurnal Rekayasa Hidrolika*, 12(3), 201–210.
- Tarigan, B. (2015). Kajian geomorfologi Danau Lau Kavar dan sekitarnya. *Jurnal Geografi*, 12(1), 45–54.
- Zhang, L., & Chen, Y. (2020). Metode kulit silinder untuk estimasi volume waduk pada badan air berbentuk tidak beraturan. *Jurnal Teknik Hidraulik*, 146(8).